1. El significado de la recursión

La recursión (en particular la iteración) es una componente fundamental de los lenguajes de programación. Vamos aquí a mostrar cuales son las dificultades que surgen al intentar dar significado a la misma. Resulta instructivo comenzar analizando el problema de definir funciones recursivas enteras. Consideramos la siguiente definición en Haskell:

```
g :: Int ->Int
g n = if n == 0 then 0
        else if n == 1 then 1
              else g (n-2)
```

¿qué función define? Si quisiera darle significado a este programa, ¿cuál sería la función $f \in \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ que representa a g?

Intuitivamente, dicha f debería satisfacer una ecuación parecida a la que define a g en Haskell:

$$f\ n\ =\ \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n-2) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases} \qquad (ER)$$

Por nuestro background, instantáneamente leemos la definición de f como si fuera una definición recursiva. Con esa intuición, enseguida concluimos que se trata de la función módulo 2 para los $n \geq 0$, y para los negativos "no termina". Llamemos $mod2$ a dicha función:

$$mod2\ n\ =\ \begin{cases} n\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ \text{no termina} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Pero en realidad, esa lectura que hicimos, y que nos permitió concluir que f era en realidad una forma de definir mod2, es apresurada. Es la que nos indica nuestra intuición, que proviene de los lenguajes de programación donde estamos acostumbrados al uso de la recursión y también de las funciones parciales. Pero no deberíamos olvidarnos de que nuestro metalenguaje tiene solamente funciones totales y que, por lo tanto, no podemos concluir tan fácilmente que nuestra intuición -acostumbrada a un contexto de funciones parciales- nos dé trivialmente la solución correcta.

Surgen varias dificultades al pretender dar significado de manera genérica a las funciones definidas de esta manera. Primero debemos observar que dominio semántico $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ es inadecuado, ya que al incluir la recursión se incorpora la posibilidad de que la evaluación que efectúa haskell no termine. Incorporaremos un objeto al dominio de "resultados posibles" que puede tomar una función entera, que usualmente denota la “no terminación”: $\perp$, denominado *bottom*. La razón de la elección de este símbolo quedará clara con el desarrollo de la teoría del punto fijo como modelo matemático. De manera que nuestro nuevo ”espacio de significado“ para una ecuación como la de arriba será $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{\perp}$, donde $\mathbf{Z}_{\perp} = \mathbf{Z} \cup \{\perp\}$.

Note que podemos ahora definir $mod2$ como función total:

$$mod2\ n \ = \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Volviendo a las dificultades que surgen al intentar dar significado a la recursión, la principal tiene que ver con que hay varias funciones de $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_{\perp}$ que satisfacen la ecuación (ER).

Veamos, por ejemplo, si $mod2$ satisface la ecuación (ER) que se dió para definir f. Para ello, colocamos $mod2$ en lugar de f a ambos lados de la ecuación:

$$mod2\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ mod2\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

¿Se satisface esta ecuación?

Para analizarla, analicemos ambos miembros de la ecuación por separado:

$$\begin{aligned} izq &= mod2\ n \\ der &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ mod2\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \end{aligned}$$

Consideramos los cuatro casos posibles:

1. Cuando $n = 0$: $izq = mod2\ 0 = 0\,\%2 = 0$ y $der = 0$. Por lo tanto la ecuación vale en este caso.
2. Cuando $n = 1$: $izq = mod2\ 1 = 1\,\%2 = 1$ y $der = 1$. Por lo tanto la ecuación vale en este caso también.
3. Cuando $n > 1$: $izq = mod2\ n = n\,\%2$ y $der = mod2\ (n-2) = (n-2)\,\%2 = n\,\%2$. Vale en este caso también.
4. Por útliimo, cuando $n < 0$: $izq = mod2\ n = \perp$ y $der = mod2\ (n-2) = \perp$. Vale en este caso también, o sea siempre.

Por lo tanto, $mod2$ es solución de la ecuación (ER). ¿Es $mod2$ la única solución de esa ecuación? No, por ejemplo la función modRara:

$$modRara\ n \ = \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ -5 & \text{si } n < 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ 7 & \text{si } n < 0 \text{ y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

también la satisface.

En realidad $modRara$ plantea la forma más general de las soluciones de la ecuación (ER), -5 y 7 pueden cambiarse por cualquier par de valores de $\mathbf{Z}_\perp$. Si ambos se cambian por $\perp$, se obtiene $mod2$.

¿Cómo hacemos para señalar "la"solución que nos interesa (en este caso mod2)? Si sólo escribimos la ecuación, como hemos visto, no alcanza. Daremos solución este problema incorporando las herramientas matemáticas adecuadas.

La idea es la siguiente: vamos a inventar un orden parcial entre los elementos de forma tal que $\perp$ sea menor que todos los demás. Y cada vez que escribamos una ecuación como (ER), diremos que nos interesa la menor solución posible. Eso excluirá por ejemplo a $modRara$, ya que son mayores que $mod2$, pues se obtienen de $mod2$ reemplazando $\perp$ por otras cosas.

El sentido del orden es el siguiente. $modRara$ como cualquier otro variante son **demasiado informativas** dado que contienen información (el -5, el 7) que no surge de la ecuación (ER). En ese sentido, $mod2$ es la que menor información contiene ya que no agrega información a la que hay en la ecuación. El símbolo $\perp$, utilizado para representar la no terminación, representa la ausencia completa de información. Esto se ajusta a la realidad: un programa que no termina no da ninguna información, ni siquiera da la información de que no termina.

Preguntas.

1. Considere la siguiente ecuación de tipo (ER)

$$f\ n \ = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ f(-n) & \text{si } n \text{ es par} \\ f(n-2) & \text{si } n \text{ es mútiplo positivo impar de 3} \\ f(-n-2) & \text{si } n \text{ es mútiplo negativo impar de 3} \\ f(n-1) & \text{caso contrario (c.c.)} \end{cases}$$

   ¿Qué infomación dá la siguiente ecuación sobre el valor que puede adoptar f (una función que la satisface) en cada entero? Esto es, dada una solución sol de la ecuación funcional: ¿para qué valores n se tiene que $sol\ n$ está determinado por la ecuación?

¿Cuál sería la solución que "no inventa información"(o sea la menor)?

Defina si es posibles otras soluciones distintas de la "menor".

2. ¿Si $f = F(f)$ es una ecuación recursiva del tipo (ER), qué operaciones puede involucrar F? Dé varios ejemplos de F.
3. Según lo visto hasta el momento, ¿qué puede decir sobre el significado de una ecuación de la forma $f = F(f)$?

2. Órdenes parciales y dominios

Un **orden parcial** es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Ejemplos: $\mathbb{N}$ con $\leq$, $\mathbb{Z}$ con $\leq$, $\mathbb{Q}$ con $\leq$, $\mathbb{R}$ con $\leq$, $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ son ejemplos de órdenes parciales (también se dice, de **conjuntos parcialmente ordenados**). Cualquier conjunto X con $=$ (la menor relación reflexiva) es un orden parcial. Se lo llama, el **orden discreto**.

Gráficamente, $\mathbb{Z}$ con $\leq$:

$$\begin{array}{r} \vdots \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ \vdots \end{array}$$

Gráficamente, $\mathbb{Z}$ con el orden discreto:

$$\ldots \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots$$

Espacio ordenado de Funciones. Si Y con $\leq_Y$ es un orden parcial, el espacio de funciones de $X \to Y$ es un orden parcial con $\leq$ definido así:

$$f \leq g \text{ sii } \forall x \in X.\ f\ x \leq_Y g\ x$$

para $f, g \in X \to Y$. Demostrar que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Lifting. Si X es un orden parcial con $\leq_X$, $X_\perp$ (que se define como $X \cup \{\perp\}$) también es un orden parcial con $\leq$ definido así:

$$x \leq y \;\text{ sii }\; x \leq_X y \;\vee\; x = \perp$$

para $x, y \in X_\perp$. Demostrar que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Si X es el orden discreto, $X_\perp$ se llama **llano**. Si lifteamos $\mathbb{Z}$ con el orden discreto, obtenemos el siguiente orden llano:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ & & \ldots & \backslash & | & / & \ldots & & \\ & & & & \perp & & & & \end{array}$$

Infinito. Si X es un orden parcial con $\leq_X$, X^∞ (que se define como $X \cup \{\infty\}$) también es un orden parcial con $\leq$ definido así:

$$x \leq y \text{ sii } x \leq_X y \ \vee \ y = \infty$$

Demostrar que $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Supremo. Dado un subconjunto $Q \subseteq P$ donde P con $\leq$ es un orden parcial, el supremo de Q (se escribe $\sup(Q)$) es el elemento de P que satisface:

- $\sup(Q)$ es cota superior de Q, y
- $\sup(Q)$ es menor que cualquier otra cota superior de Q.

En símbolos se escribe así:

- $\forall q \in Q \, . \, q \leq \sup(Q)$, y
- $\forall p \in P \, . \, (\forall q \in Q \, . \, q \leq p) \Rightarrow \sup(Q) \leq p$.

El $\sup(Q)$ puede no existir (por ejemplo, en $\mathbb{N}$ con $\leq$, el supremo del conjunto de todos los números pares no existe). Pero en los casos en que el supremo existe, es único (demostrar). Cuando existe, decimos que Q tiene supremo (que puede no estar en Q, está en P).

Cadenas. En un orden parcial P con $\leq$, una **cadena** es una secuencia infinita $p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n \leq \ldots$ de elementos de P. Si el conjunto $\{p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots\}$ es infinito, se dice que la cadena es **interesante**. Si dicho conjunto es finito, se dice que la cadena es **no interesante**. Claramente la cadena es no interesante sii a partir de cierto punto la secuencia no hace más que repetir indefinidamente un elemento.

Obviamente, una cadena no interesante siempre tiene supremo: es el elemento que se repite indefinidamente.

Ejemplos. En $\mathbb{N}$ con $\leq$, $0 \leq 2 \leq 4 \leq 6 \leq \ldots \leq 20 \leq 22 \leq \ldots$ es una cadena interesante. No tiene supremo.

En $\mathbb{N}$ con $\leq$, $0 \leq 2 \leq 4 \leq 4 \leq \ldots \leq 4 \leq 4 \leq \ldots$ es una cadena no interesante. Su supremo es 4.

Un orden discreto sólo tiene cadenas no interesantes. Más aún, las cadenas son repeticiones indefinidas de un único elemento.

Un orden llano sólo tiene cadenas no interesantes. Hay dos formas de cadenas: las que consisten de repetir indefinidamente $\perp$, y las que consisten de repetir $\perp$ solamente una cantidad finita de veces (0 o más) y luego repiten otro elemento indefinidamente.

Si tomamos $\mathbb{N}$ con $\leq_{\mathbb{N}}$ el operador relacional usual de los naturales, y consideramos $\mathbb{N}^\infty$ con $\leq$ como se definió más arriba $0 \leq 2 \leq 4 \leq 6 \leq \ldots \leq 20 \leq 22 \leq \ldots$ es una cadena interesante con supremo. El supremo es ∞. Dar un ejemplo de cadena no interesante que tenga como supremo a ∞.

Si X es finito, $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ no tiene cadenas interesantes. ¿cuántos elementos diferentes puede tener una cadena?. Si X es infinito, tiene cadenas interesantes. Todas ellas tienen supremo. ¿cuál?

Como vimos, $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_\perp$ es un orden parcial, donde $\mathbb{N}_\perp$ es el orden llano. La secuencia $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots$ es una cadena interesante, donde f_i se define de la siguiente forma

$$f_i\ n = \begin{cases} n & \text{si } n < i \\ \perp & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Esta cadena tiene como supremo a la función identidad.

Predominios. Un predominio es un orden parcial P tal que todas las cadenas tienen supremo. Como las cadenas no interesantes siempre tienen supremo, puede redefinirse así: "un predominio es un orden parcial P tal que todas las cadenas interesantes tienen supremo".

Por esa misma razón, los órdenes discretos y llanos que vimos son predominios. En cambio $\mathbb{N}$ con $\leq$, $\mathbb{Z}$ con $\leq$, $\mathbb{Q}$ con $\leq$, R con $\leq$ no son predominios porque todos tienen cadenas interesantes que no tienen supremo (por ejemplo, la cadena de los naturales pares). $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ es un predominio.

Si Y es un predominio, $X \to Y$ también lo es. Comprobarlo.

Dominios. Un **dominio** es un predominio D con elemento mínimo (que se suele denotar $\perp$). Los órdenes llanos son dominios (se los llama dominios llanos). Los órdenes discretos en general no son dominios porque no tienen elemento mínimo, salvo que se trate de un conjunto de exactamente un elemento, en cuyo caso es un dominio trivial. Si P es un predominio $P_\perp$ es un dominio. $\mathcal{P}(X)$ con $\subseteq$ es un dominio, donde $\perp$ es el conjunto vacío. A $\mathbb{N}^\infty$, donde $\mathbb{N}$ viene con el orden usual $\leq$, se lo grafica así:

$$\begin{array}{c} \infty \\ \vdots \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

Claramente 0 es el $\perp$ del dominio.
Si D es un dominio, $X \to D$ también lo es. Comprobarlo.

3. Morfismos y funciones continuas

Vimos 3 componentes en la definición de un dominio: el orden parcial, el supremo, el elemento mínimo. Cuando una función preserva alguna de estas componentes recibe un nombre especial:

Monotonía. Sean P y Q órdenes parciales con $\leq_P$ y $\leq_Q$, y sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **monótona** si f preserva orden, es decir, si $x \leq_P y \Rightarrow f\ x \leq_Q\ f\ y$.
Ejemplos. Las funciones constantes son monótonas. La función identidad en cualquier conjunto ordenado es monótona.
Las funciones monótonas de $\mathbb{B}_\perp$ en $\mathbb{B}_\perp$ son

- las funciones constantes (hay 3 de ellas),
- las que mandan $\perp$ en $\perp$ (ojo al contar, que entre éstas 9 se encuentra también la función constante $\perp$).

En total son 11.

Proposición 1. Si f es monótona, f aplicada a los elementos de una cadena devuelve una cadena.

Demostración. Si $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$ es una cadena, entonces claramente $f\ p_0 \leq_Q f\ p_1 \leq_Q f\ p_2 \leq_Q f\ p_3 \leq_Q \ldots \leq_Q f\ p_n \leq_Q \ldots$ también.

Proposición 2. Si f es monótona, entonces f preserva el supremo de cadenas no interesantes.

Demostración. Si $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P p_n \leq_P p_n \leq_P \ldots$. donde p_n es el supremo, entonces aplicando f a cada uno de los elementos de la cadena $f\ p_0 \leq_Q f\ p_1 \leq_Q f\ p_2 \leq_Q f\ p_3 \leq_Q \ldots \leq_Q f\ p_n \leq_Q f\ p_n \leq_Q f\ p_n \leq_Q \ldots$ donde $f\ p_n$ es el supremo. O sea, f del supremo es el supremo.

Pero por más que sea monótona, f puede no preservar el supremo de cadenas interesantes, como lo muestra el siguiente ejemplo. Sea $f \in$

$\mathbb{N}^\infty \to \{\top\}_\perp$ entre el dominio vertical y el dominio llano de 2 elementos:

$$\begin{array}{ccc} \infty & & \\ \vdots & & \\ 3 & & \\ 2 & \xrightarrow{f} & \\ 1 & & \top \\ 0 & & \perp \end{array}$$

sea f tal que manda todos los naturales a $\perp$ y manda ∞ a $\top$. Claramente es monótona. Pero no preserva el supremo de la cadena $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \ldots$ En efecto, el supremo de esa cadena es ∞, y f de dicho supremo es $\top$. Pero si aplico f a cada miembro de la cadena obtengo $\perp \leq \perp \leq \perp \leq \perp \leq \ldots$ cuyo supremo es $\perp \neq \top$. Por lo tanto el supremo no se preserva.

Entonces, una función monótona $f \in P \to Q$ entre predominios P y Q puede no preservar el supremo de las cadenas interesantes. Es decir, puede ocurrir que para alguna cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$, se dé la desigualdad $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \neq f\ \ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$. Pero podemos demostrar que para toda cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$. al menos se cumple $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ \ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$:

Proposición 3. Si la función $f \in P \to Q$ entre predominios es monótona entonces $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ \ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$.

Demostración. Sea f monótona y $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \ldots$ una cadena interesante (para las no interesantes ya vimos que el supremo se preserva). Para todo j, $p_j \leq_P \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$. Como f es monótona, para todo j, $f\ p_j \leq_Q f\ \ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$. Como eso vale para todo j, $f\ \ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$ es cota superior de $\{f\ p_0, f\ p_1, f\ p_2, \ldots\}$, que por proposición 1 es una cadena y por ser Q predominio su supremo existe. Como $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ es la menor tal cota, $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ \ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})$.

En el ejemplo anterior, $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = \perp$ y $f\ \ \sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}) = \top$.

Como vimos en el último ejemplo, monotonía no alcanza para que se preserve el supremo de cadenas interesantes. A las funciones que preservan supremos se las llama continuas:

Continuidad. Sean P y Q predominios con $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente y $\sup_P$ y $\sup_Q$ respectivamente. Sea $f \in P \to Q$. Se dice que f es **continua** si f preserva supremos de cadenas, es decir, si $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \ldots$ entonces el supremo $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe y $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$.

Observar que, a priori, no puedo asegurar que $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ exista ya que no es seguro que $f\ p_0, f\ p_1, \ldots, f\ p_n, \ldots$ sea una cadena. Lo sería si f fuera monótona.

Proposición 4. Si f es continua, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos $f \in P \to Q$ continua. Sea $x \leq_P y$. Entonces, $x \leq_P y \leq_P y \leq_P y \leq_P \ldots$ es una cadena (no interesante) cuyo supremo es y. Como f es continua, $\sup_Q(\{f\ x, f\ y, f\ y, f\ y, \ldots\})$ existe y es igual a $f\ (\sup_P(\{x, y, y, y, \ldots\})$. Pero el primer miembro de esa igualdad es $\sup_Q(\{f\ x, f\ y\})$ y el segundo es $f\ (\sup_P(\{x, y\})) = f\ y$. Por lo tanto, $\sup_Q(\{f\ x, f\ y\}) = f\ y$, o sea, $f\ x \leq_Q f\ y$.

La inversa no vale. Monotonía implica que $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ existe, también implica que la igualdad $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) = f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$ vale para las cadenas no interesantes, pero para las interesantes sólo implica la validez de la desigualdad $\sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq_Q f\ (sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\}))$.

Corolario. Sean P y Q predominios con $\leq_P$ y $\leq_Q$ respectivamente y $\sup_P$ y $\sup_Q$ respectivamente. Sea $f \in P \to Q$ monótona. Entonces, f es continua sii para toda cadena interesante $p_0 \leq_P p_1 \leq_P p_2 \leq_P p_3 \leq_P \ldots \leq_P p_n \leq_P \ldots$ la desigualdad $f\ (\sup_P(\{p_i | i \in \mathbb{N}\})) \leq_Q \sup_Q(\{f\ p_i | i \in \mathbb{N}\})$ también vale.

Ahora resulta fácil comprobar que las funciones constantes son continuas y que la identidad también lo es. ¿Cuáles son las funciones continuas de $\mathbb{B}_\perp$ en $\mathbb{B}_\perp$ (son todas las monótonas ya que no hay cadenas interesantes en $\mathbb{B}_\perp$).

Funciones estrictas. Sean D y D' dominios con $\perp$ y $\perp'$ respectivamente. Se dice que la función $f \in D \to D'$ es **estricta** si f preserva elemento mínimo, es decir, si $f\ \perp = \perp'$.

Las constantes no son estrictas (salvo la constante que siempre devuelve $\perp'$). La identidad es siempre estricta. ¿Cuáles son las funciones continuas estrictas de $\mathbb{B}_\perp$ en $\mathbb{B}_\perp$?

4. Teorema del Menor Punto Fijo

Teorema. Sea D un dominio, y $F \in D \to D$ continua. Entonces $\sup(F^i \perp)$ existe y es el menor punto fijo de F.

Demostración. Como $\perp$ es el elemento mínimo, $\perp \leq F \perp$. Como F es continua, F es monótona. Aplicando F a ambos lados obtenemos

$$F \perp \leq F\ (F \perp) = F^2 \perp$$

Iterando esto obtenemos $\perp \leq F \perp \leq F^2 \perp \leq F^3 \perp \leq \ldots$, es decir que $\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}$ es una cadena y por lo tanto el supremo $x = \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\})$ existe.

Veamos que es punto fijo de F, es decir, que $F\ x = x$:

$$\begin{array}{rcl} F\ x & = & F\ \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ & = & \sup(\{F\ (F^i \perp) | i \in \mathbb{N}\}) \\ & = & \sup(\{F^{i+1} \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ & = & \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ & = & x \end{array}$$

Veamos que es el menor de ellos. Sea y punto fijo de F, es decir $F\ y = y$. Veamos que $x \leq y$. Claramente $\perp \leq y$ por ser elemento mínimo. Como F es monótona, se obtiene $F \perp \leq F\ y = y$. Iterando, obtenemos $F^i \perp \leq y$ para todo i. Es decir, y es cota superior de la cadena $\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}$. Como el supremo es la menor de esas cotas,

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sup(\{F^i \perp | i \in \mathbb{N}\}) \\ & \leq & y \end{array}$$

Notación. Una notación usual para el supremo es

$$\sup\{p_i : i \leq 0\} = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} p_i$$

Podemos escribir entonces que f es continua si

$$f\left(\bigsqcup_{i=0}^{\infty} p_i\right) = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} f p_i.$$

Por otro lado, si $F \in D \to D$ es continua, entonces

$$\bigsqcup_{i=0}^{\infty} F \perp_D$$

será el menor punto fijo de F

El Teorema del Punto Fijo aplicando al problema original. Queríamos encontrar la menor solución a la ecuación (ER). Definimos $F \in (\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp) \to (\mathbb{Z} \to Z_\perp)$ por

$$F\ f\ n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Así, $F\ f\ n$ es un nombre para la parte derecha de la ecuación (ER), que ahora se puede reescribir

$$f\ n = F\ f\ n$$

O más brevemente, $f = F\ f$. Es decir que buscar una solución a la ecuación (ER) es lo mismo que buscar un punto fijo de F. Y buscar la menor solución es lo mismo que buscar el menor punto fijo de F. Asumiendo que F es continua, la menor solución es

$$\sup(F^i \perp_{\mathbb{Z}\to Z_\perp}) = \bigsqcup_{i=0}^{\infty} F^i \perp_{\mathbb{Z}\to Z_\perp}$$

Resta comprobar que F es continua, y que $\sup(F^i \perp_{\mathbb{Z}\to Z_\perp})$ es $mod2$. Dejemos por el momento la prueba de continuidad de F, y calculemos $\sup(F^i \perp_{\mathbb{Z}\to Z_\perp})$ asumiendo que lo es.

Por simplicidad en las cuentas conviene observar que F admite una definición un poco más compacta:

$$F\ f\ n = \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ f\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Calculemos $F^i \perp_{\mathbb{Z}\to Z_\perp}$. Para simplificar la notación llamemos $\perp' = \perp_{\mathbb{Z}\to Z_\perp}$.

Si $i = 0$, $F^i \perp' = F^0 \perp' = \perp' = n \mapsto \perp$.
Si $i = 1$,

$$\begin{aligned} F^i \perp' &= F^1 \perp' \\ &= F \perp' \\ &= n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \perp'\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\ &= n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \end{aligned}$$

Si $i = 2$,

$$\begin{array}{rcl}
F^i \perp' & = & F^2 \perp' \\
& = & F\ (F^1 \perp') \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ F^1 \perp' (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n-2 & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge n-2 \in \{0,1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge n-2 \notin \{0,1\} \end{cases} \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ n-2 & \text{si } n \in \{2,3\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,2,3\} \end{cases} \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \in \{0,1,2,3\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,2,3\} \end{cases}
\end{array}$$

Se puede comprobar por inducción en i que

$$(1) \qquad F^i \perp' \ = \ n \mapsto \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \in \{0,1,\ldots,2*i-1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,\ldots,2*i-1\} \end{cases}$$

En efecto, para $i = 0$ el conjunto $\{0, 1, \ldots, 2 * i - 1\}$ es vacío, por ello la fórmula (1) equivale en este caso a $\perp' = F^i \perp'$. Aprovechando que hemos calculado explícitamente $F^1 \perp'$ y $F^2 \perp'$, el lector puede comprobar que la fórmula general (1) coincide también en esos casos.

En general, asumiendo que $F^i \perp'$ satisface (1), lo demostramos para $i + 1$:

$$\begin{array}{rcl}
F^{i+1} \perp' & = & F\ (F^i \perp') \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ F^i \perp' (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ (n-2)\,\%2 & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge n-2 \in \{0,1,\ldots,2*i-1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1\} \wedge n-2 \notin \{0,1,\ldots,2*i-1\} \end{cases} \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ (n-2)\,\%2 & \text{si } n \in \{2,3,\ldots,2*i+1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,\ldots,2*i+1\} \end{cases} \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \in \{0,1,\ldots,2*i+1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,\ldots,2*i+1\} \end{cases} \\
& = & n \mapsto \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \in \{0,1,\ldots,2*(i+1)-1\} \\ \perp & \text{si } n \notin \{0,1,\ldots,2*(i+1)-1\} \end{cases}
\end{array}$$

Intuitivamente, cuando i crece, el conjunto $\{0, 1, \ldots, 2^i+1\}$ se aproxima a $\mathbb{N}$, y $F^i \perp'$ a $mod2$, cuya definición recordamos:

$$mod2 = n \mapsto \begin{cases} n\,\%2 & \text{si } n \geq 0 \\ \perp & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

A continuación comprobaremos que $mod2$ es el supremo de la cadena $F^0 \perp' \leq' F^1 \perp' \leq' F^2 \perp' \leq' \ldots$ (que es una cadena se puede demostrar, aunque en realidad es consecuencia de que F es continua (y por ello monótona), prueba que aún no hemos hecho).

Primero demostramos que para todo $i \in \mathbb{N}$, $F^i \perp' \leq' mod2$. Para ello, demostramos que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $F^i \perp' n \leq mod2\ n$. Si $n \in \{0, 1, \ldots, 2 * i - 1\}$ vale la igualdad. En caso contrario, $F^i \perp' n = \perp \leq mod2\ n$.

Por lo tanto, $mod2$ es cota superior. Veamos que es supremo. Sea f tal que $\forall i \in \mathbb{N}\ F^i \perp' \leq' f$. Veamos que $mod2 \leq' f$. Sea $n \in \mathbb{Z}$, si $n \geq 0$, sea $i = n/2 + 1$, tenemos $mod2\ n = n\,\%2 = F^i \perp' n \leq f\ n$. Si $n < 0$, $mod2\ n = \perp \leq f\ n$. Por lo tanto $mod2 \leq' f$.

Sólo resta demostrar que F es continua. Veamos primero que es monótona. Sea $f \leq' g$. Para comprobar que $F\ f \leq' F\ g$ sea $n \in \mathbb{Z}$. Si $n \in \{0, 1\}$, $F\ f\ n = n = F\ g\ n$. Si $n \notin \{0, 1\}$, $F\ f\ n = f\ (n - 2) \leq g\ (n - 2) = F\ g\ n$.

Como F es monótona, para demostrar continuidad basta con demostrar que para toda cadena interesante $f_0 \leq' f_1 \leq' f_2 \leq' \ldots$ de funciones en $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_\perp$, se satisface $F\ (\sup'\{f_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq' \sup'\{F\ f_i | i \in \mathbb{N}\}$. Recordemos que por la definición de F,

$$\begin{aligned} F\ (\sup{}'\{f_i | i \in \mathbb{N}\}) &= n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \sup{}'\{f_i | i \in \mathbb{N}\}\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \\ &= n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ \sup\{f_i\ (n-2) | i \in \mathbb{N}\} & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases} \end{aligned}$$

y por otro lado, para cada $i \in \mathbb{N}$

$$F\ f_i = n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in \{0,1\} \\ f_i\ (n-2) & \text{si } n \notin \{0,1\} \end{cases}$$

Si $n \in \{0, 1\}$, $F\ (\sup'\{f_i | i \in \mathbb{N}\})\ n = n = \sup'\{F\ f_i\ n | i \in \mathbb{N}\}$. Si $n \notin \{0, 1\}$, $F\ (\sup'\{f_i | i \in \mathbb{N}\})\ n = \sup\{f_i\ (n - 2) | i \in \mathbb{N}\} = \sup\{F\ f_i\ n | i \in \mathbb{N}\} = \sup'\{F\ f_i | i \in \mathbb{N}\}\ n$.

Hemos demostrado $F\ (\sup'\{f_i | i \in \mathbb{N}\}) = \sup'\{F\ f_i | i \in \mathbb{N}\}$, que obviamente implica $F\ (\sup'\{f_i | i \in \mathbb{N}\}) \leq' \sup'\{F\ f_i | i \in \mathbb{N}\}$. Uno puede preguntarse si valió la pena demostrar monotonía: por lo menos eso nos ahorró la demostración de la existencia de $\sup'\{F\ f_i | i \in \mathbb{N}\}$.