CLASE 28/08/2013

DEFINICIÓN: RETICULADO ACOTADO
Es una estructura de tipo $\langle L, \owedge, \ovee, 0^L, 1^L\rangle$ tal que $\langle L, \owedge, \ovee\rangle$ es un reticulado, y además posee un elemento mínimo 0^L y uno máximo 1^L

DEFINICIÓN: COMPLEMENTO, RET. COMPLEMENTADO
Sea $\langle L, \owedge, \ovee, 0^L, 1^L\rangle$ un reticulado acotado, el elem. $a \in L$ es *complementado* cuando existe $b \in L$ tal que: $a \ovee b = 1, \;\; a \owedge b = 0$.
El reticulado se dice complementado si todos los elementos tienen complemento.

$\Longrightarrow$ Pueden existir uno, varios o ningún complemento.

$\Longrightarrow$ EJEMPLOS: (1) $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X)$, es complementado

$\Longrightarrow$ (2) $(D_n, mcm, mcd, 1, n)$ es complementado sólo si n es producto de primos distintos

NOTAR: si $n = p^2 k$ entonces p no es complementado

$\Longrightarrow$ (3) N_5 y M_3 son complementados pero no hay unicidad de complemento

$\Longrightarrow$ N_5 y M_3 no son distributivos

LEMA: DESIGUALDADES DISTRIBUTIVAS
L reticulado. Valen las desigualdades:

$$x \ovee (y \owedge z) \leq (x \ovee y) \owedge (x \ovee z)$$
$$(x \owedge y) \ovee (x \owedge z) \leq x \owedge (y \ovee z)$$

LEMA: $\langle L, \ovee, \owedge\rangle$ un reticulado; son equivalentes:
$x \owedge (y \ovee z) = (x \owedge y) \ovee (x \owedge z)$, cualesquiera sean x, y, $z \in L$,
$x \ovee (y \owedge z) = (x \ovee y) \owedge (x \ovee z)$, cualesquiera sean x, y, $z \in L$.

> DEFINICIÓN: RET. DISTRIBUTIVO
> Un reticulado se llamará *distributivo* cuando cumpla alguna de las propiedades del Lema.

$\Longrightarrow$ EJEMPLOS (1) $\mathcal{P}(X)$ es distributivo (por teoría de conjuntos)

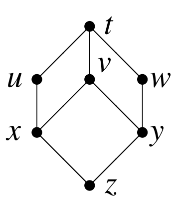
$\Longrightarrow$ (2) D_n es distributivo (prueba al final)

$\Longrightarrow$ (3) N_5 y M_3 no son distributivos

> LEMA. Si $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene **a lo sumo** un complemento.

> DEF. SUBRETICULADO
> L, reticulado, $S \subseteq L$. El subconjunto. S se dice subreticulado si es cerrado para $\vee$ y $\wedge$

$\Longrightarrow$ EJEMPLO



$(\{z, x, y, t\}, \leq_L)$ es poset reticulado pero no es subreticulado

> LEMA. L, reticulado. Entonces L es disrtibutivo si y sólo si L no tiene a N_5 y M_3 como subreticulado

$\Longrightarrow$ PROBLEMA ¿Cómo probar que un reticulado es distributivo?

> LEMA
> Todo subreticulado de un reticulado distributivo es distributivo

$\Longrightarrow$ **Método**: embeber el reticulado en un reticulado de partes.

$\Longrightarrow$ PRUEBA de "D_n es ditributivo" Sea $\{d, a, b, c, m\}$ el M_3. Si $d = mcd\{a, b\}$ y $m = mcm\{a, b\}$, entonces $ab = md$. Idem con a, c. Así probar que $b = c$.