CLASE 06/09/2013

DEFINICIÓN $(P, \leq)$ **cpo**
Diremos que $D \subseteq P$ es *decreciente* si para todo $x, z \in P$ se tiene $x \in D$ y $z \leq x \implies z \in D$.
$\mathcal{D}(P) = \{D \subseteq P : D \text{ es decreciente}\}$.
$\langle \mathcal{D}(P), \cup, \cap, \emptyset, P \rangle$. es ret. distributivo

$\Longrightarrow$ Dado un L reticulado distributivo finito,

¿Existe P poset tal que L es isomorfo a $\mathcal{D}(P)$?

DEFINICIÓN L **reticulado acotado.**
Un elemento $x \in L$ será llamado $\bigcirc\!\!\!\!\vee$-irreducible (o simplemente irreducible) si $x \neq 0$, y si $x = y \bigcirc\!\!\!\!\vee z$, entonces $x = y$ o $x = z$, para todo $y, z \in L$.
$Irr(L) = \{i \in L : i \text{ es irredicible}\}$

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE BIRKHOFF
$\langle L, \bigcirc\!\!\!\!\vee, \bigcirc\!\!\!\!\wedge, 0, 1\rangle$ un reticulado acotado distributivo finito, $P = Irr(L)$. Entonces la función
$F : L \longrightarrow \mathcal{D}(P)$
$\quad x \longrightarrow \{y \in P : y \leq x\}$
es un isomorfismo entre L y $\mathcal{D}(P)$.

LEMA 1
Sea L un reteticulado distributivo finito. Entonces para todo $x \in L$ se tiene:
(1) $x = sup\{i \in Irr(L) : i \leq x\}$,
(2) si $D \subseteq Irr(L)$ es decreciente, y $x = sup\ D$, entonces $D = \{i \in Irr(L) : i \leq x\}$.

$\Longrightarrow$ Para probar el LEMA 1 necesitamos:

LEMA A
Sea L un reticulado (no nec. distributivo!!!) finito, y sean $x, y \in L$ tales que $x \nleq y$. Entonces existe $i \in Irr(L)$ tal que $i \leq x$ e $i \nleq y$.

$\Longrightarrow$ CASO ALGEBRAS DE BOOLE: $Irr(B) = At(B)$

$\Longrightarrow$ NOTAR: El Teorema dá un "embbeding" aunque no sea distributivo

COROLARIO
L es distributivo sii $|L| = |\mathcal{D}(Irr(L))|$