CLASE 16/08/2013

RELACIÓN DE ORDEN = reflexiva + antisimétrica + transitiva
EJEMPLOS: relación "incluido" ($\subseteq$) sobre $\mathcal{P}(X)$
relación "divide" ($|$) sobre $\mathbb{N}$
relación "menor o igual" ($\leq$) sobre $\mathbb{R}$

CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS
DEFINICIÓN: Es un par $(P,\leq)$, donde P es un conj. y $\leq$ es una relación de orden sobre P.
PRECAUCIÓN: $\leq$ denota ahora una relación de orden sobre un conjunto abstracto, no sobre $\mathbb{R}$
Términos equivalentes: poset, cpo. La notación $x<y$ significa $x\leq y$ y $x\neq y$.
Orden total: $(P,\leq)$ tal que satisface la ley de dicotomía: $\forall x,y\in P \quad x\leq y \quad \text{o} \quad y\leq x$

Diagramas de Hasse (Helmut Hasse 1898-1979)
DEFINICIÓN: **Cubrimiento**
y **cubre a** x si $x\preceq y$ y no existe $z\neq x,y$ tal que $x\preceq z\preceq y$
Diagrama de Hasse = gráfico de la relación cubrimiento, utilizando arco ascendente

$\Longrightarrow$ EJEMPLO 1 $(\{a,b,c,d\},\Delta\cup\{(a,b),(a,c),(a,d),(c,d)\})$

$\Longrightarrow$ EJEMPLOS $(\{1,2,3,4,5,6\},|)$, $(\{1,2,3,4,5,6\},\leq)$, $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$

$\Longrightarrow$ La idea de elemento MAXIMAL: en el ej. 1, el elemento d es maximal aunque no es un elemento máximo, ya que d no es mayor que a ni que b

DEFINICIÓN: $(P,\leq)$ **poset,** $x\in P$
x es **Máximo** si $y\leq x$ para todo $y\in P$ (notación para el máximo: 1)
x es **Mínimo** si $x\leq y$ para todo $y\in P$ (notación para el mínimo: 0)
x es **Maximal** si no existe $y\in P$ tal que $x<y$
x es **Minimal** si no existe $y\in P$ tal que $y<x$

DEFINICIÓN: sea $(P,\leq)$ poset, $x \in P$, y $S \subseteq P$,

x es **cota superior** de S si $y \leq x$ para todo $y \in S$

x es **cota inferior** de S si $x \leq y$ para todo $y \in S$

x es **supremos** de S si x es la cota superior más chica

x es **ínfimo** de S si x es la cota inferior más grande

$\Longrightarrow$ EJEMPLO 2 $(\{a,b,c,d\},\Delta \cup \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\})$

El conjunto $\{a,b\}$ tiene dos cotas superiores (c y d) pero no tiene supremo

EJEMPLO $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ es un poset: $\sup\{A,B\} = A \cup B$, $\inf\{A,B\} = A \cap B$

PREGUNTA ¿Cuándo existen y qué son $\sup(\emptyset),\ \inf(\emptyset)$?

$\Longrightarrow$ ISOMORFISMO DE POSETS ¿En qué se diferencian <u>como estructuras de orden</u> los posets $\mathcal{P} = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\ P = \{1,2,3,6\}$?

DEFINICIÓN: ISO DE POSET $(P,\leq)$, $(Q,\leq')$ posets, y $f : P \to Q$ una función.

Diremos que f es un *isomorfismo* si f es biyectiva y para todo $x,y \in P$,

$x \leq y$ si y sólo si $f(x) \leq' f(y)$.

LEMA: $(P,\leq)$, $(Q,\leq')$ posets, y $f : P \to Q$ un iso, $S \subseteq P$:

(a) $\sup(S)$ existe sii $\sup(f(S))$ existe, y en tal caso $\sup(f(S)) = f(\sup(S))$

(b) $\inf(S)$ existe sii $\inf(f(S))$ existe, y en tal caso $\inf(f(S)) = f(\inf(S))$

(c) P tiene 1_P sii Q tiene 1_Q, y en tal caso $f(1_P)) = 1_Q$ (lo mismo para 0)

(d) p es maximal en P sii $f(p)$ es maximal en Q

$\Longrightarrow$ Problema 1. Necesidad de pedir $\Leftrightarrow$ en la definición de iso:

Se puede definir f biyectiva de $\mathbf{2}\times\mathbf{2}$ en $\mathbf{4}$ tal que satisface el $\Rightarrow$

$\Longrightarrow$ Pregunta: ¿Si existe $sup\{a,b\}$ para todo a,b, existe $sup(S)$ para calquier S?