Parte II: Lógica Proposicional

18 de septiembre de 2015

El conjunto $Prop$

- Hace un par de semanas definimos la sintaxis de la lógica proposicional, el conjunto $Prop$.
- Definición de funciones por recursión.
- Prueba de propiedades sobre $Prop$ utilizando inducción.

Semántica

- Las asignaciones son funciones en $\mathcal{V} \to \{0,1\}$.
- Dada $f\colon \mathcal{V} \to \{0,1\}$, tenemos $[\![-]\!]_f\colon \mathit{Prop} \to \{0,1\}$.
- Una proposición P es tautología si para toda asignación f, $[\![P]\!]_f = 1$.
- Una asignación f es de $\Gamma \subseteq \mathit{Prop}$, si para toda $Q \in \Gamma$, $[\![Q]\!]_f = 1$.
- Decimos que P es consecuencia lógica de Γ, $\Gamma \models P$, si para toda f de Γ, se da que $[\![P]\!]_f = 1$.

y los razonamientos correctos?

- La primera clase dijimos que la lógica es el estudio de los razonamientos lógicos.
- Pero hasta ahora no introdujimos ningún mecanismo para deducir conclusiones válidas a partir de premisas válidas.
- Esta es nuestra tarea ahora.

Inferencia

- Un razonamiento correcto es aquel que partiendo de ciertas *hipótesis* o de conocimientos previos produce nuevos conocimientos.
- Para asegurarnos que las conclusiones son válidas debemos restringir las formas (las inferencias) en que producimos las conclusiones a partir de ciertas premisas.
- Lo que vamos a dar a continuación es una serie de *reglas de inferencia* que nos aseguran que los razonamientos hechos usando esas reglas (y solo esas) son correctos.
- Por ahora nos vamos a restringir a los siguientes conectivos: $\wedge, \rightarrow, \perp$. Y establecemos que la conjunción tiene mayor precedencia que la implicación.

Reglas de inferencia

- Una regla de inferencia será una tripla $(\text{nombre}, \{P_1, \ldots, P_n\}, Q)$, donde el primer elemento es el nombre de la regla, el segundo un conjunto finito de proposiciones que representan las premisas, y el último elemento es la conclusión.
- Podemos representar gráficamente a una regla de la siguiente manera:

$$\frac{P_1 \qquad P_2 \qquad \ldots \qquad P_n}{Q}\,\text{nombre}$$

- Recordemos que tanto las P_i como Q son metavariables que pueden ser reemplazadas por cualquier proposición.

Reglas para la Conjunción

- Si conocemos (las asumimos como hipótesis o ya tenemos una prueba) P y Q, entonces podemos concluir $P \wedge Q$.
- La regla formal se llama introducción de la conjunción:

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q} \wedge I$$

- Un ejemplo concreto del uso de esta regla es la siguiente prueba:

$$\frac{p_1 \qquad p_2}{p_1 \wedge p_2} \wedge I$$

- ¿Nos dice esa prueba que $p_1 \wedge p_2$ es válido?
- No! Nos dice que de la validez de p_1 y la validez de p_2 se sigue la validez de $p_1 \wedge p_2$.

Reglas para la Conjunción

- De saber $P \wedge Q$ podemos deducir tanto P como Q.
- Tenemos entonces dos reglas para utilizar el conocimiento de una conjunción.
- La primera regla se llama eliminación de la conjunción:

$$\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E$$

- La segunda regla, que la llamamos con el mismo nombre, es:

$$\frac{P \wedge Q}{P} \wedge E$$

Ejemplos

- ¿Podemos derivar la validez de R a partir de la validez de $P \wedge (Q \wedge R)$?
- Si decimos que sí, debemos poder construir una prueba, una *derivación*, donde podemos usar varias veces las reglas de inferencia:

$$\dfrac{\dfrac{P \wedge (Q \wedge R)}{Q \wedge R}\wedge E}{R}\wedge E$$

- A partir de ahora, usaremos la expresión existe una *derivación de R a partir de $P \wedge (Q \wedge R)$*.

Ejemplos

- ¿Podemos construir una derivación de $P \wedge (Q \to Q)$ a partir de P y $(Q \to Q) \wedge R$? (Notar que tenemos varias premisas)

$$\dfrac{P \qquad \dfrac{(Q \to Q) \wedge R}{Q \to Q}\wedge E}{P \wedge (Q \to Q)}\wedge I$$

- Tanto en esta prueba como en la anterior, utilizamos la conclusión de una prueba como premisa para el uso de otra regla.

Premisas y conclusión

- Llamamos *premisas* a todas las proposiciones que no fueron obtenidas como conclusión de una prueba.
- En el último ejemplo, las premisas son P y $(Q \to Q) \wedge R$.
- Llamamos *conclusión* a la proposición que está en la raíz del árbol.
- A veces queremos referirnos a una derivación de Q a partir de la premisa P, entre otras:

$$\begin{array}{c} P \\ \\ \vdots\, D \\ Q \end{array}$$

- En este caso D es el nombre de la derivación.
- Entre las premisas de D está P; esto significa que esa proposición se ha utilizado 0, 1 o muchas veces (sin necesidad de tener una prueba con conclusión P).

Implicación

- Si D es una derivación de Q a partir de P, entonces D debería contar como una derivación de $P \to Q$.
- Pero cuando utilizamos la implicación (pensemos en el uso de "si ..., entonces ..."), queremos decir "si tuviéramos una prueba de P".
- No queremos obligarnos a tener una prueba de P, al menos hasta que querramos usar la implicación.
- Vemos entonces que cuando introducimos la implicación, quitamos la carga de la prueba sobre el antecedente.

Implicación

- Formalmente la regla de introducción de la implicación es:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[P]\\ \vdots \\ Q\end{array}}{P \to Q} \to I$$

- Aquí hay una diferencia con las anteriores reglas porque encorchetamos hojas donde esté P, si queremos.
- Esa es la manera en que indicamos que *descargamos* (o *cancelamos*) la hipótesis P.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{[P \wedge Q]_1}{Q}\wedge E \qquad \dfrac{[P \wedge Q]_1}{P}\wedge E}{\dfrac{Q \wedge P}{(P \wedge Q) \to (Q \wedge P)} \to I_1}\wedge I$$

- Como podemos utilizar varias veces la regla $\to I$, marcamos con un sub-índice aquellas hipótesis que cancelamos con cada uso de la regla.

Implicación

- La regla de eliminación de la implicación (¿cómo puedo usar una implicación?) es la conocida *modus ponens*:

$$\dfrac{P \qquad P \to Q}{Q} \to E$$

- Si definimos $\neg P$ como abreviatura de $P \to \bot$, entonces:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]_3 \qquad P \to Q}{Q} \to E \qquad \neg Q}{\bot} \to E}{\neg P} \to I_3$$

- En esta derivación, tenemos que las hipótesis no canceladas son $P \to Q$ y $\neg Q$.
- Pero podemos continuar con la derivación y cancelar todas las hipótesis.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P]_3 \qquad [P \to Q]_1}{Q}\to E \qquad [\neg Q]_2}{\bot}\to E}{\neg P}\to I_3}{\neg Q \to \neg P}\to I_2}{(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}\to I_1$$

Bottom

- Para $\perp$ no tenemos regla de introducción. ¿Por qué?
- Sin embargo, siempre que tengamos una prueba de $\perp$, podemos concluir lo que se nos antoje: "ex falso quodlibet".

$$\frac{\perp}{P}\,\perp E$$

- Ejemplo, recordemos que $\neg P$ es $P \to \perp$:

$$\cfrac{\cfrac{P \qquad \neg P}{\perp}\to E}{Q}\,\perp E$$

- Es decir, podemos construir una derivación de Q a partir de P y $\neg P$.

Reducción al absurdo

- El uso habitual de reducción al absurdo es el siguiente: “para probar P, asumí $\neg P$ y llegá a una conclusión $\bot$”.
- La regla “reducción al absurdo” entonces tendrá como conclusión a P y podremos cancelar todas las veces que querramos a $\neg P$:

$$\begin{array}{c} [\neg P] \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{P}\ RAA \end{array}$$

Reducción al absurdo, ejemplo

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\neg Q]_3$}
\AxiomC{$[\neg Q \to \neg P]_1$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\neg P$}
\AxiomC{$[P]_2$}
\RightLabel{$\to E$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{RAA_3}
\UnaryInfC{Q}
\RightLabel{$\to I_2$}
\UnaryInfC{$P \to Q$}
\RightLabel{$\to I_3$}
\UnaryInfC{$(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)$}
\end{prooftree}
$$