Parte II: Lógica Proposicional

7 de octubre de 2016

Deducción natural

- La clase pasada introdujimos las reglas de inferencia que nos aseguran que si partimos de premisas válidas, entonces las conclusiones serán válidas.
- Luego mostramos ejemplos de cómo usarlas para construir derivaciones.
- Si bien no lo explicitamos, mencionamos que las pruebas podían ser vistas cómo árboles.
- A las hojas (que no estaban entre corchetes) les llamábamos hipótesis; y a la raiz, conclusión.

Reducción al absurdo

- El uso habitual de reducción al absurdo es el siguiente: "para probar P, asumí $\neg P$ y llegá a una conclusión $\perp$".
- La regla "reducción al absurdo" entonces tendrá como conclusión a P y podremos cancelar todas las veces que querramos a $\neg P$:

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\neg P]\\ \vdots\\ \perp\end{array}}{P}\ RAA$$

Reducción al absurdo, ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Q]_3 \qquad [\neg Q \to \neg P]_1}{\neg P}\to E \qquad [P]_2}{\bot}\to E}{Q}\ RAA_3}{P \to Q}\to I_2}{(\neg Q \to \neg P) \to (P \to Q)}\to I_3$$

Ejemplos

En el pizarrón.

El conjunto de derivaciones

Definiremos el conjunto de derivaciones, $\mathcal{D}$, como el menor conjunto que satisface (en varias filminas):

$(Prop)$ Si $P \in Prop$, entonces $P \in \mathcal{D}$.

El conjunto de derivaciones

$(\wedge I)$ Si $\begin{array}{c} D_1 \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} D_2 \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ Q \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{D_1 \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \qquad D_2 \begin{array}{c} \vdots \\ Q \end{array}}{P \wedge Q} \wedge I \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

$(\wedge E)$ Si $\begin{array}{cc} D & \begin{array}{c} \vdots \\ P \wedge Q \end{array} \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces tanto

$$\begin{array}{cc} D & \dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ P \wedge Q \end{array}}{P} \wedge E \end{array} \in \mathcal{D} \text{ , como } \begin{array}{cc} D & \dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ P \wedge Q \end{array}}{Q} \wedge E \end{array} \in \mathcal{D}.$$

El conjunto de derivaciones

$(\to I)$ Si $\begin{array}{cc} & P \\ D & \vdots \\ & Q \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{cc} & [P] \\ D & \vdots \\ & Q \end{array}}{P \to Q} \to I \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\rightarrow E)$ Si $\begin{array}{c} D_1 \\ \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ P \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} D_2 \\ \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ P \rightarrow Q \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \ \vdots \\ P \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \ \vdots \\ P \rightarrow Q \end{array}}{Q} \rightarrow E \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

$(\perp E)$ Si $\begin{array}{c} D \quad \vdots \\ \perp \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \quad \vdots \\ \perp \end{array}}{P}\ \perp E \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

(RAA) Si $\begin{array}{c} \neg P \\ D \quad \vdots \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\begin{array}{c} [\neg P] \\ D \quad \vdots \\ \dfrac{\bot}{P}\, RAA \end{array} \in \mathcal{D}$

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- Si quisiéramos justificar que un árbol está en $\mathcal{D}$, entonces deberíamos mostrar cómo lo vamos construyendo a partir del uso de la regla $Prop$, utilizando las cláusulas que dimos recién.
- Eso es demasiado engorroso y no lo haremos explícitamente, pero tengamos en cuenta que podríamos hacerlo.
- Pero entonces, para qué introducir $\mathcal{D}$? ¿Qué herramientas tenemos ahora a nuestra disposición?

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- El mismo cuentito de siempre: por un lado tenemos un principio de definición de funciones por recursión.
- Por otro lado, podemos usar inducción *en subderivaciones* para probar que cierta propiedad es cierta para toda derivación.
- ¿Para qué podemos usar ese principio de inducción en subderivaciones? Para probar la corrección: es decir fundamentar nuestro eslogan de que las reglas de inferencia preservan la validez (que si lo recuerdan lo denotábamos como $\models$).

Ejemplo de función (no tan) recursiva

- Definamos ahora mismo una función $concl \colon \mathcal{D} \to Prop$, que dada una derivación dice cuál es la conclusión de esa derivación:

$$concl(P) = P \qquad (Prop)$$

$$concl\left(\frac{\begin{matrix} D_1 & \vdots \\ & P \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 & \vdots \\ & Q \end{matrix}}{P \wedge Q}\,\wedge I\right) = P \wedge Q \qquad (\wedge I)$$

$$concl\left(\frac{\begin{matrix} D & \vdots \\ & P \wedge Q \end{matrix}}{P}\,\wedge E\right) = P \qquad (\wedge E)$$

$$concl\left(\frac{\begin{matrix} D & \vdots \\ & P \wedge Q \end{matrix}}{P}\,\wedge E\right) = Q \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función (no tan) recursiva (cont)

$$concl\left(D\ \dfrac{\begin{matrix}[P]\\ \vdots\\ Q\end{matrix}}{P \to Q} \to I\right) = P \to Q \qquad (\to I)$$

$$concl\left(\dfrac{\begin{matrix}D_1 & \vdots \\ & P\end{matrix} \qquad \begin{matrix}D_2 & \vdots \\ & P \to Q\end{matrix}}{Q} \to E\right) = Q \qquad (\to E)$$

$$concl\left(D\ \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}}{P} \bot E\right) = P \qquad (\bot E)$$

$$concl\left(D\ \dfrac{\begin{matrix}[\neg P]\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{P} RAA\right) = P \qquad (RAA)$$

Ejemplo de función recursiva

- Definamos ahora mismo una función $hip\colon \mathcal{D} \to \mathcal{P}(Prop)$, que dada una derivación dice cuáles son las hipótesis no canceladas de la derivación:

$$hip(P) = \{P\} \qquad (Prop)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D_1}{\overset{\vdots}{P}} \qquad \overset{D_2}{\overset{\vdots}{Q}}}{P \wedge Q} \wedge I \right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\wedge I)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D}{\overset{\vdots}{P \wedge Q}}}{P} \wedge E \right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D}{\overset{\vdots}{P \wedge Q}}}{P} \wedge E \right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función recursiva

$$hip\left(\begin{array}{c} [P] \\ D \quad \vdots \\ \dfrac{Q}{P \to Q} \to I \end{array}\right) = hip(D) \setminus P \qquad (\to I)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \quad \vdots \\ P \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \quad \vdots \\ P \to Q \end{array}}{Q} \to E\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\to E)$$

$$hip\left(\begin{array}{c} D \quad \vdots \\ \dfrac{\bot}{P} \bot E \end{array}\right) = hip(D) \qquad (\bot E)$$

$$hip\left(\begin{array}{c} [\neg P] \\ D \quad \vdots \\ \dfrac{\bot}{P} RAA \end{array}\right) = hip(D) \setminus \{\neg P\} \qquad (RAA)$$

Derivaciones

- La clase pasada dijimos que Q *se derivaba de* $P_1, \ldots, P_n$ si existía una derivación con conclusión Q y sus hipótesis no canceladas estaban entre $P_1, \ldots, P_n$.
- Ahora que tenemos definidas formalmente las derivaciones y las nociones de hipótesis no canceladas (la función hip) y la conclusión ($concl$), podemos decirlo mejor.
- Para $\Gamma \subseteq Prop$ y $Q \in Prop$, decimos que Q *se deduce de* Γ si existe una derivación D tal que $hip(D) \subseteq \Gamma$ y $concl(D) = Q$. La notación que utilizamos es la siguiente $\Gamma \vdash Q$.
- Si Q se deduce del conjunto vacío, $\emptyset \vdash Q$, entonces decimos que Q es un *teorema*. Si Q es un teorema nos ahorramos de escribir el conjunto vacío: $\vdash Q$.

Derivaciones

- Si tenemos $\{P\} \vdash Q$, podemos construir una derivación $\vdash P \to Q$?
- Si tenemos $\{P \wedge Q\} \vdash R$, podemos construir una derivación $\vdash P \to (Q \to R)$?
- Este tipo de manipulaciones de derivaciones las podemos expresar como meta-teoremas: Si $\{P \wedge Q\} \vdash R$, entonces $\vdash P \to (Q \to R)$.