Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
16/08/2017, Práctico 1: Relaciones.

Objetivos.
En este práctico estudiaremos algunas propiedades asociadas a una relación y aprenderemos a decidir si una relación las satisface o no. En particular, nos interesan las propiedades que cumplen las relaciones de *equivalencia* y de *orden*.

Como resolver los ejercicios.
Para decidir si la relación R tiene cierta propiedad, lo que debemos hacer es:

1. saber cuál es la definición de la propiedad;
2. comprender qué significa esa propiedad en la relación R;
3. mostrar que R satisface o no la propiedad.

¿Cómo podemos mostrar que una relación R sobre el conjunto A cumple con una propiedad o no? Supongamos que la propiedad que debemos demostrar es la *reflexividad*. En este caso debemos mostrar que para todo elemento $a \in A$, se da que $a \sim_R a$; si A es finito, podemos verificarlo examinando todos los pares de la relación.

Si A es infinito, lo que debemos hacer es tomar un elemento cualquiera $x \in A$ (del que solo suponemos que está en el conjunto) y dar un argumento que muestre que $(x, x) \in R$. Si no se puede construir esa prueba,[1] puede ser que haya un *contraejemplo*, es decir un elemento $z \in A$, tal que suponer $(z, z) \in R$ nos conduzca a una situación contradictoria. Si encontramos un contraejemplo, entonces la relación R **no** satisface la reflexividad.

Ejercicios.

1. ¿Qué propiedades debe cumplir una relación para ser de equivalencia?
2. Determine si la relación dada es una relación de equivalencia sobre $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Si la relación es de equivalencia, indique las clases de equivalencia.
   a) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (1,3),(3,1)\}$
   b) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (1,3),(3,1)\ (3,4),\ (4,3)\}$
   c) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\}$
   d) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (1,5),\ (5,1),\ (3,5),\ (5,3),\ (1,3),\ (3,1)\}$
   e) $\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (1,5),\ (5,1),\ (3,5),\ (5,3),\ (1,3),\ (3,1)\}$
   f) $\{(x,y) \mid 1 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 5\}$
3. Determine si las siguientes relaciones sobre $\mathbb{N}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas:
   a) $(x,y) \in R$ sii $x^2 = y^2$
   b) $(x,y) \in R$ sii $x > y$
   c) $(x,y) \in R$ sii $x \ge y$
   d) $(x,y) \in R$ sii $x \ne y$
4. Utilizando las respuestas del ejercicio (3) determine para cada caso si la relación es de equivalencia y/o de orden. Recuerde que una relación de *orden* debe ser reflexiva, antisimétrica, y transitiva.
5. Liste los pares de la relación de equivalencia sobre $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ definida por la partición dada. También señale las clases de equivalencia [1], [2], [3] y [4].
   a) $\{1,2\},\{3,4\}$
   b) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$
   c) $\{1,2,3,4\}$
   d) $\{1\},\{2,4\},\{3\}$
6. Es habitual que hablemos de “Fulano es más joven o tiene la misma edad que Mengano” como si fuera un orden parcial, pero dado un grupo A de personas no siempre será así.
   a) De un ejemplo, puede ser ficticio, de un conjunto de personas en los cuales esa relación no sea un orden parcial.
   b) Explique qué propiedad falla para que sea un orden parcial.

[1] Esto no es lo mismo que no encontrarla rápidamente!