Parte II: Lógica Proposicional

6 de octubre de 2017

Más conectivos

- Puesto que el conjunto $\{\wedge, \rightarrow, \bot\}$ era funcionalmente completo podíamos contentarnos con esos conectivos.
- En esta clase daremos reglas de inferencia para: la negación ($\neg$), la doble implicación ($\leftrightarrow$) y la disyunción ($\vee$).

La negación

- Las reglas de la negación son muy fáciles de comprender si pensamos en cómo la habíamos definido en términos de $\to$ y $\perp$:
- Introducción:

$$\dfrac{\begin{matrix}[P] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg P}\,\neg I$$

- Eliminación:

$$\dfrac{P \qquad \neg P}{\perp}\,\neg E$$

La doble implicación, introducción

- Si pensamos que la doble implicación $\phi \leftrightarrow \psi$ se codifica como $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$, entonces no es sorprendente que la regla de introducción sea una combinación de las introducciones de $\to$ y de $\wedge$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} [\phi] & [\psi] \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \phi \end{array}}{\phi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I$$

- Recordemos que las hipótesis que podemos descargar son ϕ en el sub-árbol de la izquierda y ψ en el sub-árbol de la derecha.
- NO podemos descargar ϕ en el sub-árbol de la derecha.
- NO podemos descargar ψ en el sub-árbol de la izquierda.

La doble implicación, eliminación

- ¿Cuántas reglas habrá para eliminar la doble implicación?
- Puesto que lo codificamos como una conjunción, tendremos dos reglas de eliminación:

$$\frac{\phi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\psi} \leftrightarrow E \qquad\qquad \frac{\psi \qquad \phi \leftrightarrow \psi}{\phi} \leftrightarrow E$$

La disyunción, introducción

- La disyunción es el dual de la conjunción: mientras que para introducir una conjunción necesitamos pruebas de ambos términos, para la disyunción nos alcanza con uno.
- Por ello tenemos dos reglas de introducción:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \vee I \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi} \vee I$$

- ¿Cuántas reglas de eliminación de la disyunción habrá?

La disyunción, eliminación

- Teniendo en cuenta la dualidad entre $\wedge$ y $\vee$ es esperable tener una única regla de eliminación de la disyunción.
- Pero, cómo podemos usar una disyunción $\phi \vee \psi$?
- Si suponiendo ϕ podemos concluir χ y si suponiendo ψ también podemos concluir χ, entonces podemos concluir χ a partir de cualquiera de las dos:

$$\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi} \vee E$$

La disyunción, eliminación

- La regla de eliminación de la disyunción muestra cómo probar por casos χ:
- por un lado podemos suponer ϕ para probar χ y por lo tanto en el segundo sub-árbol podemos descargar ϕ;
- por otro lado podemos suponer ψ para probar χ, consecuentemente descargamos ψ del tercer sub-árbol.
- PERO no podemos descargar NI ϕ NI ψ en el primer sub-árbol, no al menos al usar esta regla!

Ejemplos de derivaciones con los nuevos conectivos

- $\{P \vee Q, \neg P\} \vdash Q$
- $\vdash P \vee \neg P$

Derivaciones

- Decimos que ψ *se derivaba de* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ si existe una derivación con conclusión ψ y sus hipótesis no canceladas están entre $\phi_1, \ldots, \phi_n$.
- Para $\Gamma \subseteq Prop$ y $\psi \in Prop$, decimos que ψ *se deduce de* Γ si existe una derivación D tal que las hipótesis están contenidas en Γ y su conclusión es ψ. La notación que utilizamos es la siguiente $\Gamma \vdash \psi$.
- Si ψ se deduce del conjunto vacío, $\emptyset \vdash \psi$, entonces decimos que ψ es un *teorema*. Si ψ es un teorema nos ahorramos de escribir el conjunto vacío: $\vdash \psi$.

Derivaciones

- Si tenemos $\{\phi\} \vdash \psi$, podemos construir una derivación $\vdash \phi \to \psi$?
- Si tenemos $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \chi$, podemos construir una derivación $\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$?
- Este tipo de manipulaciones de derivaciones las podemos expresar como meta-teoremas: Si $\{\phi \wedge \psi\} \vdash \chi$, entonces $\vdash \phi \to (\psi \to \chi)$.

El conjunto de derivaciones

Definiremos el conjunto de derivaciones, $\mathcal{D}$, como el menor conjunto que satisface (en varias filminas):

$(Prop)$ Si $\phi \in Prop$, entonces $\phi \in \mathcal{D}$.

El conjunto de derivaciones

$(\wedge I)$ Si $\begin{array}{cc} D_1 & \vdots \\ & \phi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{cc} D_2 & \vdots \\ & \psi \end{array} \in \mathcal{D}$,

entonces $\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & \vdots \\ & \phi \end{array} \qquad \begin{array}{cc} D_2 & \vdots \\ & \psi \end{array}}{\phi \wedge \psi} \wedge I \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\wedge E)$ Si $\begin{array}{c} D \\ \vdots \\ \phi \wedge \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\begin{array}{c} D \\ \vdots \\ \dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge E \end{array} \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\to I)$ Si $\begin{array}{cc} & \phi \\ & \vdots \\ D & \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{cc} & [\phi] \\ & \vdots \\ D & \psi \end{array}}{\phi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

$(\to E)$ Si $\begin{array}{c} D_1 \\ \vdots \\ \phi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} D_2 \\ \vdots \\ \phi \to \psi \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \vdots \\ \phi \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \vdots \\ \phi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E \in \mathcal{D}$$

El conjunto de derivaciones

$(\bot E)$ Si $\begin{array}{c} D \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \bot \end{array} \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \bot \end{array} \end{array}}{\phi}\,\bot E \in \mathcal{D}$

El conjunto de derivaciones

(RAA) Si $\begin{array}{cc} & \neg\phi \\ D & \vdots \\ & \bot \end{array} \in \mathcal{D}$, entonces $\begin{array}{cc} & [\neg\phi] \\ D & \vdots \\ & \dfrac{\bot}{\phi}\ RAA \end{array} \in \mathcal{D}$

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- Si quisiéramos justificar que un árbol está en $\mathcal{D}$, entonces deberíamos mostrar cómo lo vamos construyendo a partir del uso de la regla $Prop$, utilizando las cláusulas que dimos recién.
- Eso es demasiado engorroso y no lo haremos explícitamente, pero tengamos en cuenta que podríamos hacerlo.
- Pero entonces, para qué introducir $\mathcal{D}$? ¿Qué herramientas tenemos ahora a nuestra disposición?

El conjunto $\mathcal{D}$ y sus consecuencias

- El mismo cuentito de siempre: por un lado tenemos un principio de definición de funciones por recursión.
- Por otro lado, podemos usar inducción *en subderivaciones* para probar que cierta propiedad es cierta para toda derivación.
- ¿Para qué podemos usar ese principio de inducción en subderivaciones? Para probar la corrección: es decir fundamentar nuestro eslogan de que las reglas de inferencia preservan la validez (que si lo recuerdan lo denotábamos como $\models$).

Ejemplo de función (no tan) recursiva

- Definamos ahora mismo una función $concl\colon \mathcal{D} \to Prop$, que dada una derivación dice cuál es la conclusión de esa derivación:

$$concl(\phi) = \phi \qquad (Prop)$$

$$concl\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{D_1}{} \; \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi\end{array} \qquad \genfrac{}{}{0pt}{}{D_2}{} \; \begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \wedge \psi}\,\wedge I\right) = \phi \wedge \psi \qquad (\wedge I)$$

$$concl\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{} \; \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\phi}\,\wedge E\right) = \phi \qquad (\wedge E)$$

$$concl\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{D}{} \; \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \phi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\,\wedge E\right) = \psi \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función (no tan) recursiva (cont)

$$concl\left(\begin{array}{c} D \quad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots \\ \psi \end{array} \\ \hline \phi \to \psi \end{array} \to I\right) = \phi \to \psi \qquad (\to I)$$

$$concl\left(\begin{array}{c} D_1 \quad \begin{array}{c}\vdots \\ \phi\end{array} \qquad D_2 \quad \begin{array}{c}\vdots \\ \phi \to \psi\end{array} \\ \hline \psi \end{array} \to E\right) = \psi \qquad (\to E)$$

$$concl\left(\begin{array}{c} D \quad \begin{array}{c}\vdots \\ \bot\end{array} \\ \hline \phi \end{array} \bot E\right) = \phi \qquad (\bot E)$$

$$concl\left(\begin{array}{c} D \quad \begin{array}{c}[\neg\phi]\\ \vdots \\ \bot \end{array} \\ \hline \phi \end{array} RAA\right) = \phi \qquad (RAA)$$

Ejemplo de función recursiva

- Definamos ahora mismo una función $hip\colon \mathcal{D} \to \mathcal{P}(Prop)$, que dada una derivación dice cuáles son las hipótesis no canceladas de la derivación:

$$hip(\phi) = \{\phi\} \qquad (Prop)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D_1}{\overset{\vdots}{\phi}} \qquad \overset{D_2}{\overset{\vdots}{\psi}}}{\phi \wedge \psi}\wedge I\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\wedge I)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D}{\overset{\vdots}{\phi \wedge \psi}}}{\phi}\wedge E\right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

$$hip\left(\dfrac{\overset{D}{\overset{\vdots}{\phi \wedge \psi}}}{\phi}\wedge E\right) = hip(D) \qquad (\wedge E)$$

Ejemplo de función recursiva

$$hip\left(\begin{array}{c} [\phi] \\ D \quad \vdots \\ \psi \\ \hline \phi \to \psi \end{array} \to I\right) = hip(D) \setminus \{\phi\} \qquad (\to I)$$

$$hip\left(\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \vdots \\ \phi \end{array} \qquad \begin{array}{c} D_2 \\ \vdots \\ \phi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E\right) = hip(D_1) \cup hip(D_2) \qquad (\to E)$$

$$hip\left(\begin{array}{c} D \quad \vdots \\ \bot \\ \hline \phi \end{array} \bot E\right) = hip(D) \qquad (\bot E)$$

$$hip\left(\begin{array}{c} [\neg\phi] \\ D \quad \vdots \\ \bot \\ \hline \phi \end{array} RAA\right) = hip(D) \setminus \{\neg\phi\} \qquad (RAA)$$

Pispeando el futuro: corrección

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \vdash Q$*, entonces* $\Gamma \models Q$*.*

- Recordemos que $\Gamma \vdash Q$ significa que existe una derivación D tal que $hip\,(D) \subseteq \Gamma$ y $concl\,(D) = Q$.
- El enunciado preciso que probaremos es:
  Para toda derivación D, si $hip\,(D) \subseteq \Gamma$ y $concl\,(D) = Q$, entonces $\Gamma \models Q$.
- Para la prueba utilizaremos inducción en derivaciones.

Pispeando el futuro: completitud

Teorema (Completitud)

Si $\Gamma \models Q$, *entonces* $\Gamma \vdash Q$.

- Como $\Gamma \models Q$, entonces para todo modelo f de Γ, $[\![Q]\!]_f = 1$;
- por lo tanto no existe modelo de $\Gamma \cup \{\neg Q\}$.
- Si no existe modelo de Δ, entonces $\Delta \vdash \bot$.
- Con el punto anterior y RAA podemos concluir $\Gamma \vdash Q$.