Introducción a la Lógica y la Computación

Parte I: Estructuras Ordenadas

Clase del 21 de agosto de 2015

Estructura Algebraica

Esta formada por un conjunto con operaciones

Por ejemplo, los números enteros dotados de las operaciones suma, producto y las constantes 0 y 1 tienen estructura de **Anillo**.

Se denota: $(\mathbb{Z}, +.\cdot, 0, 1)$

Estructura Algebraica

Esta formada por un conjunto con operaciones

Por ejemplo, los números enteros dotados de las operaciones suma, producto y las constantes 0 y 1 tienen estructura de **Anillo**.

Se denota: $(\mathbb{Z}, +.\cdot, 0, 1)$

A una estructura algebraica la definen tanto el **tipo de operaciones**, como las **propiedade**s que las mismas satisfacen.

Reticulado como Estructura Algebraica

Es una tupla $(L, \vee, \wedge)$ que satisface las propiedades:

1. Idempotencia: $x \vee x = x \wedge x = x$
2. Conmutatividad: $x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x$
3. Absorción: $x \vee (x \wedge y) = x \qquad x \wedge (x \vee y) = x$
4. Asociatividad:

   $$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \qquad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

El reticulado como EA se define como TAD

TAD Reticulado

Operaciones:

$(\vee) : el \times el \to el$

$(\wedge) : el \times el \to el$

Ecuaciones:

$$x \vee x = x$$
$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x$$
$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$
$$x \wedge x = x$$
$$\vdots$$

Existencia dual de un Reticulado

- Dado un CPO $(P, \leq)$, entonces la estructura algebraica $(L, \vee, \wedge)$ satisface las propiedades de idempotencia, conmutatividad, absorción y asociatividad.

Existencia dual de un Reticulado

- Dado un CPO $(P, \leq)$, entonces la estructura algebraica $(L, \vee, \wedge)$ satisface las propiedades de idempotencia, conmutatividad, absorción y asociatividad.
- Sea $(L, \vee, \wedge)$ una estructura algebraica que satisface las propiedades de idempotencia, conmutatividad, absorción y asociatividad, entonces la relación binaria definida por:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$$

  es un orden parcial sobre L.

Existencia dual de un Reticulado

- Dado un CPO $(P, \leq)$, entonces la estructura algebraica $(L, \vee, \wedge)$ satisface las propiedades de idempotencia, conmutatividad, absorción y asociatividad.
- Sea $(L, \vee, \wedge)$ una estructura algebraica que satisface las propiedades de idempotencia, conmutatividad, absorción y asociatividad, entonces la relación binaria definida por:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$$

  es un orden parcial sobre L.

Notación: A $(L, \vee, \wedge)$ también le llamamos **reticulado** (visto como estructura algebraica)

Las construcciones son recíprocas

Lema

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un reticulado (como estructura algebraica). La relación binaria definida por:

$$x \leq y \iff x \vee y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple:

$$x \vee y = sup\{x, y\}, \qquad x \wedge y = inf\{x, y\}$$

Las construcciones son recíprocas

o sea,

El CPO $(L, \leq)$ que se obtiene de $(L, \vee, \wedge)$ definiendo:

$$x \leq y \iff x \vee y = y$$

es un reticulado en el cual las operaciones supremo e ínfimo coinciden con $\vee$ y $\wedge$ resp.

Ejemplos

1. Si X es un conjunto arbitrario, entonces $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ es un reticulado. La relación binaria inducida por $\cup$ y $\cap$ es precisamente la inclusión, pues

$$A = A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad B \subseteq A$$

Ejemplos

1. Si X es un conjunto arbitrario, entonces $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ es un reticulado. La relación binaria inducida por $\cup$ y $\cap$ es precisamente la inclusión, pues

$$A = A \cup B \iff B \subseteq A$$

2. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces (D_n, mcm, mcd) es un reticulado. La relación binaria inducida es la de divisibilidad, pues

$$mcm(x, y) = y \iff x|y$$

Isomorfismo de reticulados

El concepto de Estructura Algebraica tiene asociado su propia noción de isomorfismo: dos estructuras son isomorfas si existe una biyección que preserva las operaciones.

Isomorfismo de reticulados

El concepto de Estructura Algebraica tiene asociado su propia noción de isomorfismo: dos estructuras son isomorfas si existe una biyección que preserva las operaciones.

Definición: **Isomorfismo de reticulados**
Sean $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle L', \vee', \wedge' \rangle$ reticulados. Una función $F : L \to L'$ se dice un *isomorfismo* de reticulados si F es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y).$$

Comparación de las nociones de Isomorfismo

Isomorfismo como posets:

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) \leq' F(y)$$

Comparación de las nociones de Isomorfismo

Isomorfismo como posets:

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) \leq' F(y)$$

Isomorfismo como estructura algebraica:

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$
$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$

Equivalencia de las nociones de Isomorfismo

Teorema:
Sean $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle L', \vee', \wedge' \rangle$ reticulados y sean $(L \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Entonces una función $F : L \mapsto L'$ es un isomorfismo entre las estructuras $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle L', \vee', \wedge' \rangle$ si y sólo si lo es entre los posets $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$.

Reticulados acotados

Sea L un reticulado. Consideramos L simultaneamente dotado de su estructura de poset $(L, \leq)$ y de reticulado $\langle L, \vee, \wedge \rangle$.

Reticulados acotados

Sea L un reticulado. Consideramos L simultaneamente dotado de su estructura de poset $(L, \leq)$ y de reticulado $\langle L, \vee, \wedge \rangle$.

Definición: L será **acotado** si tiene máximo y mínimo.

Reticulados acotados

Sea L un reticulado. Consideramos L simultaneamente dotado de su estructura de poset $(L, \leq)$ y de reticulado $\langle L, \vee, \wedge \rangle$.

Definición: L será **acotado** si tiene máximo y mínimo.

Notación: Usamos

1^L para denotar al máximo

0^L para denotar al mínimo

Reticulados complementados

Sea L un reticulado y sea $x \in L$. Decimos que x es **complementado** si existe $y \in L$ tal que

$$x \vee y = 1^L \qquad x \wedge y = 0^L$$

Reticulados complementados

Sea L un reticulado y sea $x \in L$. Decimos que x es **complementado** si existe $y \in L$ tal que

$$x \vee y = 1^L \qquad x \wedge y = 0^L$$

L será un **reticulado complementado** si todos sus elementos tienen al menos 1 complemento.

Falla Estructural

El complemento no está determinado por la estructura de orden, como lo están las operaciones supremo e ínfimo.