Existencia dual de un Reticulado

- Dado un CPO reticulado $(L, \leq)$, entonces la estructura algebraica $(L, \vee, \wedge)$ satisface las propiedades de idempotencia, conmutatividad, absorción y asociatividad.
- Sea $(L, \vee, \wedge)$ una estructura algebraica que satisface las propiedades de idempotencia, conmutatividad, absorción y asociatividad, entonces la relación binaria definida por:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$$

  es un orden parcial sobre L.

Las construcciones son recíprocas

Lema

Sea $(L, \vee, \wedge)$ un reticulado (como estructura algebraica). La relación binaria definida por:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple:

$$x \vee y = sup\{x, y\}, \qquad x \wedge y = inf\{x, y\}$$

Las construcciones son recíprocas

o sea,

El CPO $(L, \leq)$ que se obtiene de $(L, \vee, \wedge)$ definiendo:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y$$

es un reticulado en el cual las operaciones supremo e ínfimo coinciden con $\vee$ y $\wedge$ resp.

Ejemplos

1. Si X es un conjunto arbitrario, entonces $(\mathcal{P}(X), \vee, \wedge)$ es un reticulado. La relación binaria inducida por $\cup$ y $\cap$ es precisamente la inclusión, y

$$A \vee B = A \cup B \qquad\qquad A \wedge B = A \cap B$$

2. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $(D_n, \vee, \wedge)$ es un reticulado. La relación binaria inducida es la de divisibilidad,

$$x \vee y = mcm(x, y) \qquad\qquad x \wedge y = mcd(x, y)$$

Notación

Cuando escibimos

"sea L un reticulado"

consideramos L simultaneamente dotado de su estructura de poset $(L, \leq)$ y de estructura algebraica $\langle L, \vee, \wedge \rangle$.

Reticulados acotados

Definición: L será **acotado** si tiene máximo y mínimo.

Notación: Usamos

1^L para denotar al máximo

0^L para denotar al mínimo

Reticulados complementados

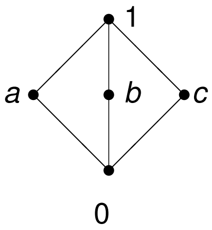
Sea L un reticulado acotado y sea $x \in L$. Decimos que x es **complementado** si existe $y \in L$ tal que

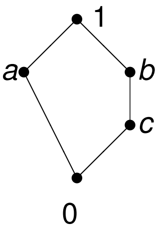
$$x \vee y = 1^L \qquad x \wedge y = 0^L$$

L será un **reticulado complementado** si todos sus elementos tienen al menos 1 complemento.

Falla Estructural

El complemento no está determinado por la estructura de orden, como lo están las operaciones supremo e ínfimo.





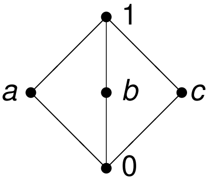
Propiedad de distributividad

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

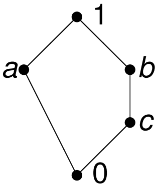
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$$

¿Valen en todo reticulado?

Casos paradigmáticos de no distributividad



M_3



N_5

$$c \vee (b \wedge a) \neq (c \vee b) \wedge (c \vee a)$$

$$b \wedge (c \vee a) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge a)$$

Desigualdades distributivas

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$$

La propiedad de Distributividad

Lema: Sea L un reticulado; entonces son equivalentes:

1. Para todo $x, y, z \in L$,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

2. Para todo $x, y, z \in L$,

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Notar que hay reticulados que no satisfacen ni 1 ni 2.

Distributividad implica compleménto único

Lema:
Si L es un reticulado acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a **lo sumo** un complemento.

Notar que puede **no haber** complementos, por ejemplo

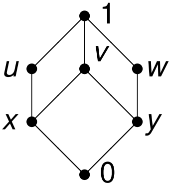
Noción de subreticulado

Sea L un reticulado. Un subconjunto $M \subseteq L$ será llamado *subreticulado* de L si

1. $M \neq \emptyset$,
2. para todo $x, y \in M$, se tiene que $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Por ejemplo:

Considere el reticulado



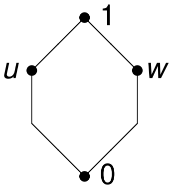
$\{0, x, y, 1\}$ no es subreticulado

$\{0, u, w, 1\}$ es subreticulado

Un subreticulado es un reticulado

Notar que M dotado de las operaciones (y/o el orden) heredadas de L es en sí mismo un reticulado.

$\{0, u, w, 1\}$ es el subreticulado



Noción de subreticulado II

Sean S y L dos reticulados.

Se suele decir que S es subreticulado de L cuando en realidad S es isomorfo a un subreticulado de L

Por ejemplo,

- $\mathcal{P}(\{a, b\})$ es subreticulado de D_{12}
- D_{12} es subreticulado de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$