# Introducción a la Lógica y la Computación

Parte I: Estructuras Ordenadas

Clase del 29 de agosto de 2014

# Álgebras de Boole

Es una estructura del tipo $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$, donde $B$ es un conjunto no vacío, y además satisface:

1. $\langle B, \vee, \wedge\rangle$ es un reticulado distributivo
2. Para todo $x \in B$ se tiene

$$0 \leq x \qquad x \leq 1$$

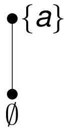
3. para cada $x \in L$, se tiene que

$$x \vee x' = 1, \qquad x \wedge x' = 0$$

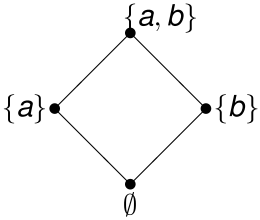
# Álgebra de Boole de conjuntos

Sea $X$ un conjunto.

Entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X \rangle$ es un álgebra de Boole,




$\mathcal{P}(\{a\})$




$\mathcal{P}(\{a, b\})$

# Leyes de de Morgan

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole, entonces se cumple:

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$

# Isomorfismo de Álgebras de Boole

Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B', \vee', \wedge', '', 0^{B'}, 1^{B'} \rangle$ Álgebras de Boole. Una función $F : B \to B'$ se dice un *isomorfismo* si $F$ es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$

# Isomorfismo de Álgebras de Boole

Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B', \vee', \wedge', '', 0^{B'}, 1^{B'} \rangle$ Álgebras de Boole. Una función $F : B \to B'$ se dice un *isomorfismo* si $F$ es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$

$$F(x') = (F(x))''$$

# Isomorfismo de Álgebras de Boole

Sean $\langle B, \vee, \wedge, ', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B', \vee', \wedge', '', 0^{B'}, 1^{B'} \rangle$ Álgebras de Boole. Una función $F : B \to B'$ se dice un *isomorfismo* si $F$ es biyectiva y para todo $x, y \in L$ se cumple que

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$

$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$

$$F(x') = (F(x))''$$

$$F(0^B) = 0^{B'}$$

$$F(1^B) = 1^{B'}$$

# Comparación de las nociones de Isomorfismo

**Isomorfismo como posets**:

$$x \leq y \iff F(x) \leq' F(y)$$

**Isomorfismo como estructura algebraica**:

$$F(x \vee y) = F(x) \vee' F(y)$$
$$F(x \wedge y) = F(x) \wedge' F(y)$$
$$F(x') = (F(x))''$$
$$F(0^B) = 0^{B'}$$
$$F(1^B) = 1^{B'}$$

# Equivalencia de las nociones de Isomorfismo

**Teorema**:
Sean $\langle B, \vee, \wedge,', 0^B, 1^B \rangle$ y $\langle B', \vee', \wedge',", 0^{B'}, 1^{B'} \rangle$ Álgebras de Boole y sean $(B \leq)$ y $(B', \leq')$ los posets asociados. Entonces una función $F : B \mapsto B'$ es un isomorfismo entre las estructuras $\langle B, \vee, \wedge,', ^B, 1^B \rangle$ y $\langle L', \vee', \wedge',", 0^{B'}, 1^{B'} \rangle$ si y sólo si lo es entre los posets $(B, \leq)$ y $(B', \leq')$.

# Cuestión a resolver

Todas las Álgebras de Boole vistas (aunque estén camufladas como $D_6$ o $D_{30}$) son en definitiva (vía isomorfismo) de la forma $\mathcal{P}(X)$.

O sea, son **álgebras de conjuntos**.

# Cuestión a resolver

Todas las Álgebras de Boole vistas (aunque estén camufladas como $D_6$ o $D_{30}$) son en definitiva (vía isomorfismo) de la forma $\mathcal{P}(X)$.

O sea, son **álgebras de conjuntos.**

¿Será cierto que todas las Álgebras de Boole son álgebras de conjuntos?

(En tal caso estaríamos en presencia de una abstracción "poco abstracta")

# Próximo objetivo: Teorema de Representación

Toda Álgebra de Boole **finita** $B$ es un **álgebra de conjuntos.**
O sea, existe $X$ tal que

$$B \cong \mathcal{P}(X)$$

# Próximo objetivo: Teorema de Representación

Toda Álgebra de Boole **finita** $B$ es un **álgebra de conjuntos.**
O sea, existe $X$ tal que

$$B \cong \mathcal{P}(X)$$

**Pregunta inicial:**

¿Qué objetos juegan el rol de elementos de $X$?

# Átomos

Sea $B$ un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si $a$ cubre a 0.

# Átomos

Sea $B$ un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si $a$ cubre a 0.

**Notación**: $At(B)$ es el conjunto de todos los átomos de $B$.

# Átomos

Sea $B$ un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si $a$ cubre a 0.

**Notación**: $At(B)$ es el conjunto de todos los átomos de $B$.

**Por ejemplo**:

1. En $\mathcal{P}(X)$, los átomos son los conjuntos unitarios.

# Átomos

Sea $B$ un álgebra de Boole (basta con que sea reticulado).

Un elemento $a \in B$ será llamado **átomo** si $a$ cubre a 0.

**Notación**: $At(B)$ es el conjunto de todos los átomos de $B$.

**Por ejemplo**:

1. En $\mathcal{P}(X)$, los átomos son los conjuntos unitarios.
2. Los átomos de $D_{12}$ son 2 y 3.

# Hay suficiente cantidad de átomos

**Lema**

Sea $B$ un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de $B$ se escribe de manera única como supremo de átomos.

# Hay suficiente cantidad de átomos

**Lema**

Sea $B$ un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de $B$ se escribe de manera única como supremo de átomos.

O sea: para todo $x \in B$ se tiene:

1. $x = sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$,

# Hay suficiente cantidad de átomos

**Lema**

Sea $B$ un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de $B$ se escribe de manera única como supremo de átomos.

O sea: para todo $x \in B$ se tiene:

1. $x = sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$,
2. si $A \subseteq At(B)$ y $x = sup\ A$, entonces

$$A = \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

# Prueba del Lema

**Lema A**

Sea $B$ un álgebra de Boole finita. Para todo $x \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$.

# Prueba del Lema

**Lema A**
Sea $B$ un álgebra de Boole finita. Para todo $x \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$.

**Lema B** Sea $B$ un álgebra de Boole finita, y sean $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$. Entonces existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

# Teorema de Representación

Sea $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole finita, y sea $X = At(B)$. La función

$$\begin{array}{rcl} F : B & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ x & \longrightarrow & \{a \in X : a \leq x\} \end{array}$$

es un isomorfismo entre $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ y $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^c, \emptyset, X\rangle$.

# Esquema de la Prueba del TR

$$
\begin{array}{c}
\text{Lema A} \\
\downarrow \\
\text{Lema B} \\
\downarrow \\
\text{Lema} \\
\downarrow \\
\text{Teorema de Representación}
\end{array}
$$

# TR no vale para el caso infinito

Existe un álgebra de Boole **infinita** que no es isomorfa $\mathcal{P}(X)$, para ningún $X$.

Construiremos un Álgebra de Boole $\mathcal{B}$, y usaremos un argumento sobre su cardinalidad para probar que no es isomorfa a ningún álgebra de la forma $\mathcal{P}(X)$.

# Cardinal de un conjunto

1. $X$ tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre $X$ y $\{1, 2, ..., n\}$.

# Cardinal de un conjunto

1. $X$ tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre $X$ y $\{1, 2, ..., n\}$.
2. Si $X$ no es finito, decimos que $X$ es **infinito**.

# Cardinal de un conjunto

1. $X$ tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre $X$ y $\{1, 2, ..., n\}$.
2. Si $X$ no es finito, decimos que $X$ es **infinito**.
3. $X$ tiene cardinal **infinito numerable** si se puede encontrar una biyección entre $X$ y $\mathbb{N}$. En tal caso se dice que $X$ tiene cardinal $\aleph_0$.

# Cardinal de un conjunto

1. $X$ tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre $X$ y $\{1, 2, ..., n\}$.
2. Si $X$ no es finito, decimos que $X$ es **infinito**.
3. $X$ tiene cardinal **infinito numerable** si se puede encontrar una biyección entre $X$ y $\mathbb{N}$. En tal caso se dice que $X$ tiene cardinal $\aleph_0$.
4. Si $X$ es infinito y no se puede encontrar tal biyección, decimos que $X$ es **infinito no numerable**.

# Cardinal de un conjunto

1. $X$ tiene cardinal **finito** si $X = \emptyset$, o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede encontrar una biyección entre $X$ y $\{1, 2, ..., n\}$.
2. Si $X$ no es finito, decimos que $X$ es **infinito.**
3. $X$ tiene cardinal **infinito numerable** si se puede encontrar una biyección entre $X$ y $\mathbb{N}$. En tal caso se dice que $X$ tiene cardinal $\aleph_0$.
4. Si $X$ es infinito y no se puede encontrar tal biyección, decimos que $X$ es **infinito no numerable.**
5. Ejemplos de conjuntos infinitos no numerables: $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . Ambos tienen cardinal $\aleph_1$.

# Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \ldots$

# Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < ... < \aleph_0 < \aleph_1 < ...$

1. Si $X$ es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?

# Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < ... < \aleph_0 < \aleph_1 < ...$

1. Si $X$ es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?
2. Si $X$ es **infinito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es **infinito no numerable.**

# Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

Los cardinales tiene un orden

$0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \ldots$

1. Si $X$ es **finito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es finito ¿Cuál es su cardinal?
2. Si $X$ es **infinito**, entonces $\mathcal{P}(X)$ es **infinito no numerable.**

# Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $0 < 1 < 2 <$ | $\ldots$ | $< \aleph_0$ | $< \aleph_1 < \aleph_2 \ldots.$ |
| $\mathcal{P}(X)$ | | | $\mathcal{P}(X)$ |
| ($X$ finito) | | $\downarrow$ | ($X$ infinito) |

No es el cardinal
de ningún $\mathcal{P}(X)$

# Cardinal de $\mathcal{P}(X)$

$$\begin{array}{c|c|c} 0<1<2<\quad \dots & <\aleph_0 & <\aleph_1<\aleph_2\ \dots. \\ \mathcal{P}(X) & & \mathcal{P}(X) \\ (X \text{ finito}) & \downarrow & (X \text{ infinito}) \end{array}$$

No es el cardinal
de ningún $\mathcal{P}(X)$

**Conclusión:** Si podemos construir un Álgebra de Boole $\mathcal{B}$ que tenga cardinal **infinito numerable** (o sea $\aleph_0$), entonces no podrá existir una biyección (ni un isomorfismo) entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{P}(X)$, para ningún $X$.

# Construcción de $\mathcal{B}$

Un subconjunto de números naturales se dice *cofinito* si su complemento es finito.

Definimos:

$$\mathcal{B} = \{X \subseteq \mathbf{N} : X \text{ es finito o cofinito}\}.$$

Entonces la estructura

$$\langle \mathcal{B}, \cup, \cap, ^c, \emptyset, \mathbf{N} \rangle$$

es un álgebra de Boole.

# Problema de la representación de un reticulado

Las Álgebras de Boole finitas son álgebras de conjuntos.

¿Serán los reticulados finitos reticulados de conjuntos?