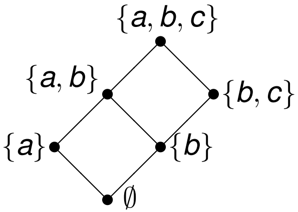
Problema de la representación de un reticulado

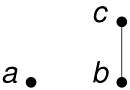
Las Álgebras de Boole finitas son álgebras de conjuntos.

¿Serán los reticulados finitos reticulados de conjuntos?

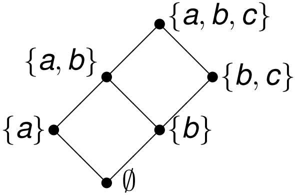


¿Cómo garantizar la unión y la intersección?

Conjuntos decrecientes de un poset: si un elemento está, entonces están todos los menores.



Los conj. decrecientes son: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$



Conjuntos decrecientes de un poset

Sea $(P, \leq)$ un poset

Diremos que un subconjunto $D \subseteq P$ es **decreciente** si para todo $x, z \in P$ se tiene que:

$$x \in D \text{ y } z \leq x \implies z \in D.$$

O sea, un conjunto decreciente satisface que si un elemento se encuentra en el conjunto, entonces todos los elementos menores también están.

Reticulado de conjuntos decrecientes de un poset

Denotaremos mediante $\mathcal{D}(P)$ a la familia de todos los subconjuntos decrecientes de P:

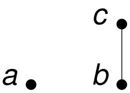
$$\mathcal{D}(P) = \{D \subseteq P : D \text{ es decreciente}\}.$$

Entonces

$$\langle \mathcal{D}(P), \cup, \cap, \emptyset, P \rangle.$$

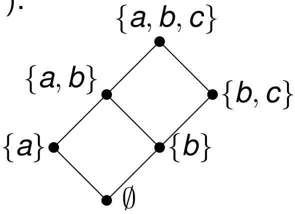
es un **reticulado es distributivo**

Ejemplo: sea P el poset



Los conj. decrecientes son: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

Forman el reticulado $\mathcal{D}(P)$:

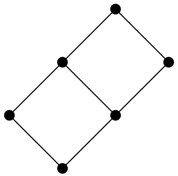


Problema de la representación de un reticulado

¿Será cierto que para todo reticulado distributivo L existe un poset P tal que

$$L \cong \mathcal{D}(P)$$

Dado L un reticulado, ¿cómo obtengo el P tal que $L \cong \mathcal{D}(P)$?



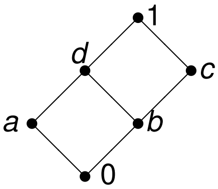
Elementos Irreducibles

Sea L un reticulado acotado. Un elemento $x \in L$ será llamado **irreducible** si

1. $x \neq 0$,
2. si $x = y \vee z$, entonces $x = y$ o $x = z$, para todo $y, z \in L$.

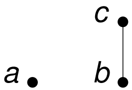
La segunda condición es equivalente a decir que x no se puede obtener como supremo de dos elementos distintos de x.

Ejemplos de Elementos Irreducibles



Elementos irreducibles: a, b, c

Forman el poset:



Poset de Elementos Irreducibles

Definición: $Irr(L) = \{i \in L : i \text{ es irreducible}\}$

Próximo objetivo: Demostrar que todo reticulado distributivo finito L es isomorfo a $\mathcal{D}(P)$, donde el poset $(P, \leq)$ asociado al reticulado L es

$$(Irr(L), \leq)$$

,
donde $\leq$ es el orden heredado de L.

Hay suficiente cantidad de Irreducibles

Lema A

Sea L un reticulado finito, y sean $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$.
Entonces existe $i \in Irr(L)$ tal que $i \leq x$ e $i \not\leq y$.

Hay suficiente cantidad de Irreducibles

Lema

Sea L un reticulado distributivo finito. Entonces para todo $x \in L$ se tiene:

1. $x = sup\{i \in Irr(L) : i \leq x\}$,
2. si $D \subseteq Irr(L)$ es decreciente, y $x = sup\ D$, entonces

$$D = \{i \in Irr(L) : i \leq x\}$$

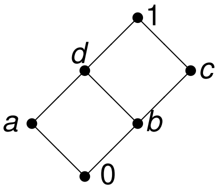
Teorema de Birkhoff

Sea L un reticulado acotado distributivo finito, y sea $P = Irr(L)$. Entonces la función

$$\begin{array}{rcl} F : L & \longrightarrow & \mathcal{D}(P) \\ x & \longrightarrow & \{y \in P : y \leq x\} \end{array}$$

es un isomorfismo entre L y $\mathcal{D}(P)$.

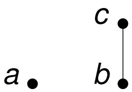
El ejemplo D_{12} completo



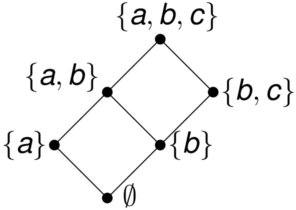
L

$Irr(L) = \{a, b, c\}$

Forman el poset:



$$\mathcal{D}(P) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$



La correspondencia F dada por el Teorema es:

$0 \to \emptyset$	$a \to \{a\}$
$b \to \{b\}$	$d \to \{a,b\}$
$c \to \{b,c\}$	$1 \to \{a,b,d\}$

Nuevo criterio de análisis de distributividad

Se puede observar que la única intervención de la distributividad en la prueba del Teorema de Birkhoff es para probar que F es sobre.

Criterio de análisis de distributividad

Un reticulado finito es ditributivo si y sólo si $|L| = |\mathcal{D}(Irr(L))|$

Volviendo a las Álgebras de Boole

Vale:

$At(B) = Irr(B)$

Entonces, si L es un reticulado acotado distributivo finito, se tiene:

L es álgebra de Boole si y sólo si $Irr(L) = At(L)$.