Algoritmos y Estructuras de Datos I - 2007
Práctico 4: Tipos Abstractos de Datos

Docentes: Silvina Smith, Renato Cherini, Valeria Rulloni,
Alejandro Peralta Frías, Mariada Bodano

18 de octubre de 2007

1. Considere la función $[\![\;]\!] : [Nat] \rightarrow Int$ especificada por:

$$[\![xs]\!] = \left(\sum i \;:\; 0 \leq i < \#xs \;:\; xs.i * B^i\right)$$

la cual permite representar un número en base B con una lista de naturales.

   a) Pruebe que la función especificada posee las siguientes propiedades:
      (i) $[\![[\;]]\!] = 0$
      (ii) $[\![x \triangleright xs]\!] = x + B * [\![xs]\!]$

   b) Defina una operación $\oplus : [Nat] \times [Nat] \rightarrow [Nat]$ que represente la suma de enteros habitual, es decir, que satisfaga $[\![xs \oplus ys]\!] = [\![xs]\!] + [\![ys]\!]$

   c) Defina una operación $\otimes : [Nat] \times [Nat] \rightarrow [Nat]$ que represente la multiplicación de enteros habitual, es decir, que satisfaga $[\![xs \otimes ys]\!] = [\![xs]\!] \times [\![ys]\!]$.

2. Considere la función $[\![\;]\!] : (Nat, Nat) \rightarrow Int$ especificada por:

$$[\![(a, b)]\!] = a - b$$

Observe que la función permite representar un número entero con un par de naturales. Defina las siguientes operaciones:

   a) $\oplus : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \rightarrow (Nat, Nat)$, que represente la suma de enteros.

   b) $\ominus : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \rightarrow (Nat, Nat)$, que represente la diferencia de enteros.

   c) $\otimes : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \rightarrow (Nat, Nat)$, que represente el producto de enteros.

   d) $\circeq : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \rightarrow Bool$, que represente la relación "=" de los enteros.

   e) $\circledless : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \rightarrow Bool$, que represente la relación "<" de los enteros.

3. Considere la función $[\![\;]\!] : Nat \rightarrow Bool$ especificada por:

$$[\![n]\!] \equiv n \neq 0$$

Observe que la función permite representar los booleanos con los naturales. Defina las siguientes operaciones:

   a) **true** : Nat, que represente a la constante $true$.

   b) **false** : Nat, que represente a la constante $false$.

   c) $\textcircled{\wedge} : Nat \times Nat \rightarrow Nat$, que represente al operador $\wedge$.

   d) $\textcircled{\vee} : Nat \times Nat \rightarrow Nat$, que represente al operador $\vee$.

   e) $\textcircled{\neg} : Nat \rightarrow Nat$, que represente al operador $\neg$.

   f) $\textcircled{\equiv} : Nat \times Nat \rightarrow Nat$, que represente al operador $\equiv$.

4. Considere la función $[\![\ ]\!] : [Bool] \to \{Nat\}$ especificada por:

$$[\![xs]\!] = \{i \mid 0 \leq i < \#xs \wedge xs.i\}$$

Observe que la función permite representar un conjunto de números naturales con una lista de booleanos. Se define la función $[\![\ ]\!]_n$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl}
[\![xs]\!]_0 & = & [\![xs]\!] \\
[\![[\ ]]\!]_n & = & \emptyset \\
[\![x \triangleright xs]\!]_n & = & (\quad x \to \{n\} \cup [\![xs]\!]_{n+1} \\
& & \Box\ \neg x \to [\![xs]\!]_{n+1} \\
& &)
\end{array}$$

Defina las siguientes operaciones:

a) $\bigcirc\!\!\!\!\cup$: $[Bool] \times [Bool] \to [Bool]$, que represente a la unión de conjuntos habitual, es decir, que satisfaga $[\![xs \bigcirc\!\!\!\!\cup\, ys]\!]_n = [\![xs]\!]_n \cup [\![ys]\!]_n$.

b) $\bigcirc\!\!\!\!\cap$: $[Bool] \times [Bool] \to [Bool]$, que represente a la intersección de conjuntos.

c) $\ominus$: $[Bool] \times [Bool] \to [Bool]$, que represente a la diferencia de conjuntos.

d) $\bigcirc\!\!\!\!\in$: $Nat \to [Bool] \to Bool$, que represente a la pertenencia de un elemento a un conjunto, es decir, que satisfaga $n \bigcirc\!\!\!\!\in\ xs \equiv n \in [\![xs]\!]$ (sin subíndice).

Ayuda: propiedades de conjuntos que pueden ser útiles:

$$\begin{array}{lll}
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) & A \cup \emptyset = A & A - \emptyset = A \\
(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) & A \cap \emptyset = \emptyset & \emptyset - A = \emptyset \\
A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) & &
\end{array}$$