Algoritmos y Estructuras de Datos I - 2007
Práctico 5: Programación Imperativa

Docentes: Silvina Smith, Renato Cherini, Valeria Rulloni,
Alejandro Peralta Frias, Mariana Badano

18 de octubre de 2007

1. Dadas las siguientes propiedades del transformador de predicados wp,

   Exclusión de milagros: $[wp.S.False \equiv False]$
   Conjuntividad: $[wp.S.(P \wedge Q) \equiv wp.S.P \wedge wp.S.Q]$

   a) Demostrar monotonía: $[(P \Rightarrow Q) \quad \Rightarrow \quad (wp.S.P \Rightarrow wp.S.Q)]$.
   b) Usando monotonía, demostrar: $\{Q\}\, S\, \{A\} \wedge (A \Rightarrow R) \quad \Rightarrow \quad \{Q\}\, S\, \{R\}$.

2. Usando las propiedades de $wp.S.Q$, demostrar las siguientes reglas:

   a) $\{P\}\, S\, \{Q\} \wedge [P_0 \Rightarrow P] \quad \Rightarrow \quad \{P_0\}\, S\, \{Q\}$
   b) $\{P\}\, S\, \{Q\} \wedge [Q \Rightarrow Q_0] \quad \Rightarrow \quad \{P\}\, S\, \{Q_0\}$
   c) $\{P\}\, S\, \{Q\} \wedge \{P\}\, S\, \{Q\} \quad \equiv \quad \{P\}\, S\, \{Q \wedge R\}$
   d) $\{P\}\, S\, \{Q\} \wedge \{R\}\, S\, \{Q\} \quad \equiv \quad \{P \vee R\}\, S\, \{Q\}$

3. En cada uno de los siguientes casos, determinar $wp.S.Q$. Suponer que las variables x, y, z, q, r son de tipo Int, las variables i, j de tipo Nat y las variables a, b de tipo $Bool$.

   a) $S:\ x := 8$ y $Q:\ x = 8$
   b) $S:\ x := 8$ y $Q:\ x \neq 8$
   c) $S:\ x := 8$ y $Q:\ x = 7$
   d) $S:\ x := x + 2;\ y := y - 2$ y $Q:\ x + y = 0$
   e) $S:\ x := x + 1;\ y := y - 1$ y $Q:\ x * y = 0$
   f) $S:\ x := x + 1;\ y := y - 1$ y $Q:\ x + y + 10 = 0$
   g) $S:\ z := z * y;\ x := x - 1$ y $Q:\ z * y^x = c$
   h) $S:\ x, z, y := 1, c, d$ y $Q:\ z * x^y = c^d$
   i) $S:\ i, j := i + i, j;\ j := j + i$ y $Q:\ i = j$
   j) $S:\ x := (x - y) * (x + y)$ y $Q:\ x + y^2 = 0$
   k) $S:\ q, r := q + 1, r - y$ y $Q:\ q * y + r = x$
   l) $S:\ a := (a \equiv b);\ b := (a \equiv b);\ a := (a \equiv b)$ y $Q:\ (a \equiv B) \wedge (b \equiv A)$

4. Dos programas S y T son equivalentes (notación: $S = T$) si y sólo si $wp.S.Q \equiv wp.T.Q$ para todo predicado Q. Demostrar:

   a) $(x := x) = skip$
   b) $S; skip = S$ y $skip; S = S$ (es decir, $skip$ es el elemento neutro de la concatenación)
   c) $S; abort = abort$ y $abort; S = abort$
   d) $(S; T); U = S; (T; U)$ (es decir, la composicion secuencial ; es asociativa)

5. Teniendo en cuenta las siguientes propiedades de la sustitución en predicados:

   a) $(Q(x := E))(x := F) \equiv Q(x := E(x := F))$, donde x es una (lista de) variable(s), y E y F son (listas de) expresiones bien definidas.

   b) $Q(x := E) \equiv Q(x, y := E, y)$, donde x e y son variables distintas.

   demostrar que los programas con variables x, y, z de tipo Int

$$\begin{array}{lll} x, y := y, x \qquad & z := x; \qquad & x := x - y; \\ & x := y; & y := x + y; \\ & y := z & x := y - x \end{array}$$

   son equivalentes. Demostrar la corrección de cada uno de los programas respecto a la precondicion $x = X \wedge y = Y$ y la postcondición $x = Y \wedge y = X$.

6. Calcular expresiones E y F tales que se satisfagan las siguientes ternas de Hoare:

   a) $\{A = q * B + r\}\ q := E;\ r := r - B\ \{A = q * B + r\}$

   b) $\{x * y + p * q = N\}\ x := x - p;\ q := F\ \{x * y + p * q = N\}$

7. Demostrar que los siguientes programas son correctos. En todos los casos x, y son de tipo Int, y a, b de tipo $Bool$.

(a)
$$\begin{array}{ll} \{True\} & \\ \underline{\textbf{if}} & x \geq 1 \rightarrow x := x + 1 \\ \Box & x \leq 1 \rightarrow x := x - 1 \\ \underline{\textbf{fi}} & \\ \{x \neq 1\} & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \{True\} & \\ \underline{\textbf{if}} & x \geq y \rightarrow skip \\ \Box & x \leq y \rightarrow x, y := y, x \\ \underline{\textbf{fi}} & \\ \{x \geq y\} & \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} \{True\} & \\ x, y := y * y, x * x; & \\ \underline{\textbf{if}} & x \geq y \rightarrow x := x - y \\ \Box & x \leq y \rightarrow y := y - x \\ \underline{\textbf{fi}} & \\ \{x \geq 0 \wedge y \geq 0\} & \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{ll} \{True\} & \\ \underline{\textbf{if}} & \neg a \vee b \rightarrow a := \neg a \\ \Box & a \vee \neg b \rightarrow b := \neg b \\ \underline{\textbf{fi}} & \\ \{a \vee b\} & \end{array}$$

8. En cada caso demostrar que si el programa de la izquierda es correcto, entonces el de la derecha tambien lo es:

(a)
$$\begin{array}{ll} \{P\} & \\ \underline{\textbf{if}} & B \rightarrow S \\ \underline{\textbf{fi}} & \\ \{Q\} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \{P\} \\ S \\ \{Q\} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} \{P\} & \\ \underline{\textbf{if}} & B_0 \rightarrow S_0 \\ \Box & B_1 \rightarrow S_1 \\ \underline{\textbf{fi}} & \\ \{Q\} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \{P\} & \\ \underline{\textbf{if}} & B_0 \rightarrow S_0 \\ \Box & \neg B_0 \rightarrow S_1 \\ \underline{\textbf{fi}} & \\ \{Q\} & \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ll} \{P\} & \\ \underline{\textbf{if}} & B_0 \rightarrow S_0 \\ \Box & B_1 \rightarrow S_1 \\ \Box & B_2 \rightarrow S_2 \\ \underline{\textbf{fi}} & \\ \{Q\} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} \{P\} & & \\ \underline{\textbf{if}} & B_0 \rightarrow S_0 & \\ \Box & \neg B_0 \rightarrow & \underline{\textbf{if}} \quad B_1 \rightarrow S_1 \\ & & \Box \quad B_2 \rightarrow S_2 \\ & & \underline{\textbf{fi}} \\ \underline{\textbf{fi}} & & \\ \{Q\} & & \end{array}$$

9. Suponiendo que el programa de la izquierda es correcto, demostrar que el de la derecha también lo es:

$$\{P\}\quad \underline{\textbf{if}}\ B_0 \rightarrow S_0 \quad \{Q\} \qquad\qquad \{P\}\quad \underline{\textbf{if}}\ B_0 \wedge \neg B_1 \rightarrow S_0 \quad \{Q\}$$
$$\Box\, B_1 \rightarrow S_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \Box\, B_1 \rightarrow S_1$$
$$\underline{\textbf{fi}} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\textbf{fi}}$$

Esto significa que siempre se puede lograr que el $\underline{\textbf{if}}$ sea *determinístico* (sólo *una* guarda verdadera).

10. Demuestrar que los siguientes programas con ciclos son correctos:

(a) $\{N \geq 0\}$

$x := 0;$
$\underline{\textbf{do}}\quad x \neq N \rightarrow x := x + 1$
$\underline{\textbf{od}}$

$\{x = N\}$

(b) $\{N \geq 0\}$
$x, y := 0, 0;$
$\underline{\textbf{do}}\quad x \neq 0 \rightarrow x := x - 1$
$\Box\quad y \neq N \rightarrow x, y := N, y + 1$
$\underline{\textbf{od}}$
$\{x = 0 \wedge y = N\}$

Ayuda: El invariante para el caso (a) es $0 \leq x \leq N$.

11. Teniendo en cuenta la definición de equivalencia entre programas, demostrar que:

a) $\underline{\textbf{if}}\ False \rightarrow S\ \underline{\textbf{fi}}\ = abort$

b) $\underline{\textbf{do}}\ False \rightarrow S\underline{\textbf{od}}\ = skip$

12. Demostrar que todo ciclo se puede reescribir como un ciclo con una sola guarda:

$$\begin{array}{lcl} \underline{\textbf{do}}\ B_0 \rightarrow S_0 & = & \underline{\textbf{do}}\ B_0 \vee B_1 \rightarrow \\ \Box\ B_1 \rightarrow S_1 & & \quad \underline{\textbf{if}}\ B_0 \rightarrow S_0 \\ \underline{\textbf{od}} & & \quad \Box B_1 \rightarrow S_1 \\ & & \quad \underline{\textbf{fi}} \\ & & \underline{\textbf{od}} \end{array}$$