# Algoritmos y estructuras de datos I - 2009

## Práctico 1: Cuantificación generalizada

Docentes: Mariana Badano, Silvina Smith, Valeria Rulloni

1. Enunciar las reglas de rango vacío, rango unitario y partición de rango para los siguientes cuantificadores:
   *a*) Para todo.
   *b*) Existe.
   *c*) Sumatoria.
   *d*) Productoria.
   *e*) Máximo.
   *f*) Mínimo.
   *g*) Intesección.
   *h*) Unión.

2. Dar las reglas que satisfacen los conjuntos definidos por comprensión. Ayuda: $\{T.x \,/\, R.x\} = (\cup x \,:\, R.x \,:\, \{T.x\})$.

3. Sea $\oplus$ un cuantificador asociado a un operador conmutativo y asociativo. Probar la siguiente regla de eliminación de una *dummy* ($Z$ no depende de $i$ ni de $j$): $(\oplus i,j \,:\, i = Z \wedge R.i.j \,:\, T.i.j) \equiv (\oplus j \,:\, R.Z.j \,:\, T.Z.j)$.

4. Demostrar: $(\exists\, x,y \,:\, x = y \,:\, P.x.y) \equiv (\exists\, x \,::\, P.x.x)$. Ayuda: $P \equiv P \wedge True$.

5. Probar que la implicación es distributiva con respecto al cuantificador universal:
   $(\forall\, i \,:\, R.i \,:\, Z \Rightarrow T.i) \equiv Z \Rightarrow (\forall\, i \,:\, R.i \,:\, T.i)$.

6. Probar las **reglas de instanciación** para la cuantificación universal y existencial:
   *a*) $(\forall\, i \,::\, f.i) \Rightarrow f.x$.
   *b*) $f.x \Rightarrow (\exists\, i \,::\, f.i)$.
   Ayuda: $True \equiv i = x \vee i \neq x$.

7. Probar la regla de intercambio para el cuantificador existencial usando la del cuantificador universal y De Morgan:
   $(\exists\, i \,:\, R.i \,:\, T.i) \equiv (\exists\, i \,::\, R.i \wedge T.i)$.

8. Demostrar la siguiente relación entre el máximo y el mínimo: $(\mathrm{Min}\ i \,:\, R.i \,:\, -F.i) = -(\mathrm{Max}\ i \,:\, R.i \,:\, F.i)$.
   Ayuda: darle un nombre al máximo (o al mínimo) y luego describir qué significa que sea el máximo (o el mínimo).

9. El cuantificador aritmético $N$ está definido por: $(N\, i \,:\, R.i \,:\, T.i) \doteq (\sum i \,:\, R.i \wedge T.i \,:\, 1)$.
   *a*) Enunciar y demostrar la regla de partición de rango para $N$.
   *b*) Ídem con la regla del rango vacío.
   *c*) Probar: $(\sum i \,:\, R.i \wedge T.i \,:\, k) = k * (N\, i \,:\, R.i \,:\, T.i)$

10. Deemostrar la regla de rango unitario para el cuantificador $N$, usando la definición de $N$ y análisis por casos.

11. Suponiendo que: *a*) $x = (\sum i \,:\, R.i \,:\, f.i)$ y *b*) $R.i \not\equiv i = N$ para cualquier $i$, calcular una expresión libre de cuantificadores equivalente a: $(\sum i \,:\, R.i \vee i = N \,:\, f.i)$.

12. Suponiendo que: *a*) $x = (\mathrm{Max}\ i,j \,:\, R.i.j \wedge j < N+1 \,:\, f.i.j)$ y *b*) $y = (\mathrm{Max}\ i \,:\, R.i.(N+1) \,:\, f.i.(N+1))$, calcular una expresión libre de cuantificadores equivalente a: $(\mathrm{Max}\ i,j \,:\, R.i.j \wedge (j < N+1 \vee j = N+1) \,:\, f.i.j)$.

13. Suponiendo que: *a*) $x = (\mathrm{Max}\ i \,:\, R.i.N \,:\, f.i.N)$, *b*) $R.y.(z+1) = R.y.z \ \vee\ y = z+1$ para cualquier $y$, $z$, *c*) $f.y.y = 0$ para cualquier $y$, *d*) $f.y.(z+1) = f.y.z + g.z$ para cualquier $y$, $z$ y *e*) $R.y.z \not\equiv False$ para cualquier $y$, $z$, calcular una expresión libre de cuantificadores equivalente a: $(\mathrm{Max}\ i \,:\, R.i.(N+1) \,:\, f.i.(N+1))$.

14. Suponiendo que: *a*) $x \equiv (\forall\, i,j \,:\, R.i.j \wedge j < N \,:\, f.i \Rightarrow f.j)$ y *b*) $y \equiv (\forall\, i \,:\, R.i.N \,:\, \neg f.i)$, calcular una expresión libre de cuantificadores equivalente a: $(\forall\, i,j \,:\, R.i.j \wedge (j < N \vee j = N) \,:\, f.i \Rightarrow f.j)$.

15. *a*) Probar la siguiente versión de la regla de intercambio para el cuantificador universal:
   $(\forall\, i \,:\, R.i \wedge S.i \,:\, T.i) \equiv (\forall\, i \,:\, R.i \,:\, S.i \Rightarrow T.i)$.
   *b*) Suponiendo válidas las reglas del término, de intercambio, anidado, distributividad, De Morgan e instanciación, demostrar las siguientes reglas para el cuantificador universal:
   (i) $(\forall\, i \,:\, R.i \,:\, True) \equiv True$.
   (ii) Partición de rango.
   (iii) Partición de rango generalizada.
   (iv) Cambio de variables. Sugerencia: demostrar las siguientes implicaciones:
   - $(\forall\, i \,:\, R.i \,:\, T.i) \Rightarrow (\forall\, j \,:\, R.(f.j) \,:\, T.(f.j))$ para *cualquier* función $f$.
   - usando lo anterior, demostrar: $(\forall\, i \,:\, R.i \,:\, T.i) \Leftarrow (\forall\, j \,:\, R.(f.j) \,:\, T.(f.j))$ para $f$ *invertible.*

16. Demostrar que para cualquier $\oplus$, $R$, $S$ y $T$ se cumple:
   $(\oplus i \,:\, R \,:\, T) \oplus (\oplus i \,:\, S \,:\, T) \equiv (\oplus i \,:\, R \vee S \,:\, T) \oplus (\oplus i \,:\, R \wedge S \,:\, T)$.
   Notar: es la versión general del ejercicio **??**ii.