Algoritmos y estructuras de datos I - 2009

Práctico 3: Especificaciones implícitas. Tipos abstractos de datos

Docentes: Mariana Badano, Valeria Rulloni, Silvina Smith

1. Considere la función $[\![\ ]\!] : [Nat] \mapsto Int$ especificada por:

$$[\![xs]\!] = (\sum\ i\ :\ 0 \leq i < \#xs\ :\ xs.i * B^i),$$

la cual permite representar un número en base B con una lista de naturales.

   (a) Pruebe que la función especificada posee las siguientes propiedades:
      (i) $[\![[\ ]]\!] = 0$
      (ii) $[\![x \triangleright xs]\!] = x + B * [\![xs]\!]$

   (b) Defina una operación $\bigoplus : [Nat] \times [Nat] \mapsto [Nat]$ que represente la suma de enteros habitual, es decir, que satisfaga $[\![xs \oplus ys]\!] = [\![xs]\!] + [\![ys]\!]$.

   (c) Defina una operación $\otimes : [Nat] \times [Nat] \mapsto [Nat]$ que represente la multiplicación de enteros habitual, es decir, que satisfaga $[\![xs \otimes ys]\!] = [\![xs]\!] * [\![ys]\!]$.

2. Considere la función $[\![\ ]\!] : (Nat, Nat) \mapsto Int$ especificada por:

$$[\![(a, b)]\!] = a - b$$

Observe que la función permite representar un número entero con un par de naturales.

Defina las siguientes operaciones:

   (a) $\bigoplus : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \mapsto (Nat, Nat)$, que represente la suma de enteros.
   (b) $\ominus : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \mapsto (Nat, Nat)$, que represente la diferencia de enteros.
   (c) $\otimes : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \mapsto (Nat, Nat)$, que represente el producto de enteros.
   (d) $\circleddash : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \mapsto Bool$, que represente la relación "=" de los enteros.
   (e) $\circledless : (Nat, Nat) \times (Nat, Nat) \mapsto Bool$, que represente la relación "<" de los enteros.

3. Considere la función $[\![\ ]\!] : Nat \mapsto Bool$ especificada por:

$$[\![n]\!] \equiv n \neq 0$$

Observe que la función permite representar los booleanos con los naturales. Defina las siguientes operaciones:

   (a) **true** : Nat, que represente a la constante $true$.
   (b) **false** : Nat, que represente a la constante $false$.
   (c) $\circledvee : Nat \times Nat \mapsto Nat$, que represente al operador $\vee$.
   (d) $\circledwedge : Nat \times Nat \mapsto Nat$, que represente al operador $\wedge$.
   (e) $\circleddash : Nat \mapsto Nat$, que represente al operador $\neg$.
   (f) $\circledequiv : Nat \times Nat \mapsto Nat$, que represente al operador $\equiv$.

4. Considere la función $[\![\ ]\!] : [Bool] \mapsto \{Nat\}$ especificada por:

$$[\![xs]\!] = \{i \mid 0 \leq i < \#xs \wedge xs.i\}$$

Observe que la función permite representar un conjunto de números naturales con una lista de booleanos. Se define la función $[\![\ ]\!]_n$ de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} [\![xs]\!]_0 & \doteq & [\![xs]\!] \\ \\ [\![[\ ]]\!]_n & \doteq & \emptyset \\ [\![x \triangleright xs]\!]_n & \doteq & (\quad x \rightarrow \quad \{n\} \cup [\![xs]\!]_{n+1} \\ & & \Box\ \neg x \rightarrow \quad [\![xs]\!]_{n+1} \\ & &) \end{array}$$

Defina las siguientes operaciones:

(a) $\bigcirc\!\!\!\!\cup : [Bool] \times [Bool] \mapsto [Bool]$, que represente a la unión de conjuntos habitual, es decir, que satisfaga $[\![xs \bigcirc\!\!\!\!\cup ys]\!]_n = [\![xs]\!]_n \cup [\![ys]\!]_n$.

(b) $\bigcirc\!\!\!\!\cap : [Bool] \times [Bool] \mapsto [Bool]$, que represente a la intersección de conjuntos.

(c) $\ominus : [Bool] \times [Bool] \mapsto [Bool]$, que represente a la diferencia de conjuntos.

(d) $\bigcirc\!\!\!\!\in : Nat \mapsto [Bool] \mapsto Bool$, que represente a la pertenencia de un elemento a un conjunto, es decir, que satisfaga $x \bigcirc\!\!\!\!\in xs \ \equiv\ k \in [\![xs]\!]$ (sin subíndice).

Ayudas: 1) propiedades de conjuntos que pueden ser útiles:

$$\begin{array}{lll} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) & A \cup \emptyset = A & A - \emptyset = A \\ (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) & A \cap \emptyset = \emptyset & \emptyset - A = \emptyset \\ A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) & & \end{array}$$

2) Observe que $[\![\ ]\!]_n$ permite calcular $[\![\ ]\!]$ recursivamente.