Algoritmos y Estructuras de Datos I - 2º cuatrimestre 2010

Práctico 1: Cálculo proposicional, de predicados y Cuantificación generalizada

Docentes: Javier Blanco, Renato Cherini, Mariana Badano, Mauricio Tellechea, Demetrio Vilela

El objetivo general de esta guía es retomar la práctica tanto del calculo proposicional como el de predicados, e introducirnos al cálculo con cuantificadores generales. Se pretende lograr familiaridad con los axiomas y teoremas, sus formas de aplicación, y al mismo tiempo adquirir las habilidades necesarias para resolver las cuentas.

En particular, el extremo detalle solicitado en el ejercicio 1 (requisito que no mantendremos en el futuro) intenta llamar la atención sobre el cuidado que debemos prestar cuando realizamos las demostraciones, para no aplicar un axioma o teorema de forma incorrecta. El ejercicio 2 es un pequeño compendio de teoremas muy útiles.

A partir del ejercicio 3 se hace hincapié en la ejercitación de las reglas básicas de los cuantificadores, cuyo manejo fluido es un requisito indispensable para el resto de la materia. Notar que utilizamos indiscriminadamente el término "regla" para denotar tanto axiomas como teoremas.

1. Demostrá los siguientes teoremas del cálculo proposicional con máximo nivel de detalle. Justificá cada paso con el nombre del axioma y/o teorema utilizado, y la correspondiente sustitución. Cuando la regla se aplique en una subfórmula, señalála subrayándola. Por ejemplo, la siguiente es una demostración de $(p \not\equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \not\equiv q) \not\equiv r)$:

$$\begin{array}{ll}
 & (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\
\equiv & \{\ (\textbf{A6} \text{ - Definición de } \not\equiv)(P, Q := p, (q \not\equiv r))\ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\
\equiv & \{\ (\textbf{A6} \text{ - Definición de } \not\equiv)(P, Q := q, r)\ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\
\equiv & \{\ (\textbf{A4} \text{ - Definición de } \neg)(P, Q := q, r)\ \} \\
 & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\
\equiv & \{\ (\textbf{A6} \text{ - Definición de } \not\equiv)(P, Q := (p \equiv \neg q), r)\ \} \\
 & \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{\ (\textbf{A2} \text{ - Conmutatividad de } \equiv)(P, Q := p, \neg q)\ \} \\
 & \underline{(\neg q \equiv p)} \not\equiv r \\
\equiv & \{\ (\textbf{A4} \text{ - Definición de } \neg)(P, Q := q, p)\ \} \\
 & \neg\underline{(q \equiv p)} \not\equiv r \\
\equiv & \{\ (\textbf{A2} \text{ - Conmutatividad de } \equiv)(P, Q := p, q)\ \} \\
 & \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{\ (\textbf{A6} \text{ - Definición de } \not\equiv)(P, Q := p, q)\ \} \\
 & (p \not\equiv q) \not\equiv r
\end{array}$$

   a) *Asociatividad de la conjunción*: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.
   b) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$.
   c) *Neutro de la conjunción*: $p \wedge true \equiv p$.
   d) *Absorción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
   e) *De Morgan para $\wedge$*: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

2. Demostrá los siguientes teoremas del cálculo proposicional:

   a) *Debilitamiento para $\wedge$*: $p \wedge q \Rightarrow p$.
   b) *Relación $\Rightarrow$ respecto a $\Leftarrow$*: $p \Rightarrow q \equiv q \Leftarrow p$.
   c) *Intercambio para $\Rightarrow$*: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.
   d) *Implicación distribuye a izquierda con $\equiv$*: $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow r$.
   e) *Doble implicación*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \equiv q$.
   f) *Contrarrecíproca*: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.
   g) *Modus ponens*: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.

h) *Modus tollens*: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.

i) *Transitividad*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

j) *Monotonía conjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$.

k) *Monotonía disjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$.

3. Enunciá las reglas de *rango vacío*, *rango unitario*, *partición de rango*, *término*, *término constante*, *distributividad*, y *anidado* para cada uno de los siguientes cuantificadores:

   a) Cuantificador universal ($\forall$)
   b) Cuantificador existencia ($\exists$)
   c) Sumatoria ($\sum$)
   d) Productoria ($\prod$)
   e) Máximo (Max)
   f) Mínimo (Min)
   g) Intesección ($\bigcap$)
   h) Unión ($\bigcup$)

4. Además de las reglas del item anterior, el cuantificador $\forall$ posee un axioma extra, la *regla de intercambio*:

$$\langle \forall i \,:\, R.i \,:\, T.i \rangle \equiv \langle \forall i \,:\,:\, R.i \Rightarrow T.i \rangle$$

   Utilizando la definición de $\exists$ en función de $\forall$ (De Morgan generalizado), calculá la *regla de intercambio* para $\exists$.

5. Suponé que $\bigoplus$ es un cuantificador asociado a un operador genérico $\oplus$, que es conmutativo y asociativo (así como el $\forall$ es el cuantificador asociado a la conjunción $\wedge$). Suponé ademas que Z es una constante, y $R.i.j$ y $T.i.j$ predicados arbitrarios (posiblemente dependientes de i y j). Demostrá la siguiente *regla de eliminación de variable* dummy:

$$\langle \bigoplus i, j \,:\, i = Z \wedge R.i.j \,:\, T.i.j \rangle \equiv \langle \bigoplus j \,:\, R.Z.j \,:\, T.Z.j \rangle$$

   a) ¿Es estrictamente necesario que Z sea constante?

   b) El $\exists$ es el cuantificador asociado a la disyunción $\vee$, y éste es asociativo y conmutativo. Por lo tanto, la regla anterior vale para el $\exists$. ¿se puede utilizar esta regla para demostrar $\langle \exists x, y \,:\, x = y \,:\, P.x.y \rangle \equiv \langle \exists x \,:\,:\, P.x.x \rangle$?

6. Demostrá las siguientes reglas:

   a) *Distributividad de* $\forall$ *respecto a* $\Rightarrow$:

$$\langle \forall i \,:\, R.i \,:\, Z \Rightarrow T.i \rangle \equiv Z \Rightarrow \langle \forall i \,:\, R.i \,:\, T.i \rangle$$

   ¿Qué restricciones se deben establecer sobre Z?

   b) *Instanciación de* $\forall$:

$$\langle \forall i \,:\,:\, T.i \rangle \Rightarrow T.x$$

   donde x es una variable libre

   ¿Como sería la regla de instanciación para $\exists$? Enunciala y demostrala.

   c) *Intercambio para* $\forall$ *(generalizada)*:

$$\langle \forall i \,:\, R.i \wedge S.i \,:\, T.i \rangle \equiv \langle \forall i \,:\, R.i \,:\, S.i \Rightarrow T.i \rangle$$

7. Demostrá la siguiente relación entre el máximo y el mínimo:

$$\langle \mathrm{Min}\ i \,:\, R.i \,:\, -T.i \rangle = -\langle \mathrm{Max}\ i \,:\, R.i \,:\, T.i \rangle$$

   Ayuda: utilizá una variable m para denotar el máximo (o mínimo) y partiendo de $m = \langle \mathrm{Min}\ i \,:\, R.i \,:\, -T.i \rangle$ intentá llegar a $m = -\langle \mathrm{Max}\ i \,:\, R.i \,:\, T.i \rangle$

8. El cuantificador aritmético N está definido utilizando la sumatoria: $\langle \mathrm{N} i : R.i : T.i \rangle \doteq \langle \sum i : R.i \wedge T.i : 1 \rangle$

   a) Enunciá y demostrá las reglas de *rango vacío*, *rango unitario* y *partición de rango* para N.

   b) Demostrá $\langle \sum i : R.i \wedge T.i : k \rangle = \langle \mathrm{N} i : R.i : T.i \rangle \times k$

9. Sólo utilizando las reglas de término, intercambio, anidado, distributividad, De Morgan e instanciación, demostrá las siguientes reglas para el cuantificador universal:

   a) $\langle \forall i : R.i : \mathit{true} \rangle \equiv \mathit{true}$

   b) *Partición de rango*

   c) *Partición de rango generalizada*

   d) *Cambio de variable*

   Ayuda: Podes demostrar las siguientes implicaciones por separado. Para la segunda, podés ademas utilizar la primera.

   - $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \Rightarrow \langle \forall j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$
   - $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \Leftarrow \langle \forall j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$ para f *invertible*

10. Sea $\bigoplus$ el cuantificador asociado a un operador $\oplus$, $R.i$, $S.i$ y $T.i$ predicados arbitrarios. Demostrá:

$$\langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : S.i : T.i \rangle \quad = \quad \langle \bigoplus i : R.i \vee S.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : R.i \wedge S.i : T.i \rangle$$