Algoritmos y Estructuras de Datos I - 2º cuatrimestre 2010

Práctico 3: Tipos abstractos de datos

Docentes: Javier Blanco, Mariana Badano, Renato Cherini, Mauricio Tellechea, Santiago Videla, Demetrio Vilela

Esta guía se centra en la obtención de la implementación de diferentes tipos abstractos de datos. Recordá que no está permitido utilizar el tipo de datos a representar en su propia implementación.

1. Considerá la función de abstracción $[\![\ ]\!] : [Nat] \to Nat$ especificada como:

$$[\![xs]\!] = \langle \sum i \ : \ 0 \leq i < \#xs \ : \ xs.i \times B^i \rangle$$

que permite representar un número natural dada una base B y una lista de números naturales xs. Por ejemplo el número 17 puede representarse en base 2 con la lista $[1, 0, 0, 0, 1]$ (y aunque *no* es lo esperado también puede representarse en la misma base con la lista $[8, 1]$).

   a) Demostrá que la siguiente es una definición recursiva para $[\![\ ]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} [\![\ ]\!] & \doteq & 0 \\ [\![x \triangleright xs]\!] & \doteq & x + B \times [\![xs]\!] \end{array}$$

   b) Derivá una función $\oplus : [Nat] \to [Nat] \to [Nat]$ que represente la suma de enteros representados con $[\![\ ]\!]$, es decir, que satisfaga la especificación: $[\![xs \oplus ys]\!] = [\![xs]\!] + [\![ys]\!]$.

   c) En el ítem anterior no deberías utilizar $[\![\ ]\!]$ como **función recursiva** en la definición que obtuvo. Sin embargo, en el proceso de derivación es válido utilizar de manera indiferente tanto la especificación de $[\![\ ]\!]$ como su definición recursiva, ¿por qué?

   d) Definí una función $\otimes : [Nat] \to [Nat] \to [Nat]$ que represente la multiplicación de enteros, satisfaciendo la especificación: $[\![xs \otimes ys]\!] = [\![xs]\!] \times [\![ys]\!]$.

2. Considerá la función de abstracción $[\![\ ]\!] : (Nat, Nat) \to Int$ especificada como:

$$[\![(a, b)]\!] = a - b$$

que permite representar un número entero con un par de números naturales. Por ejemplo el número -17 puede estar representado por $(0, 17)$ (también por $(1, 18)$, $(2, 19)$, etc.). Especificá formalmente y derivá cada una de las siguientes funciones:

   a) $\oplus : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to (Nat, Nat)$, que suma dos enteros representados por $[\![\ ]\!]$.

   b) $\ominus : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to (Nat, Nat)$, que resta dos enteros.

   c) $\otimes : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to (Nat, Nat)$, que multiplica dos enteros.

   d) $\ominus : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to Bool$, que compara con la relación de igualdad dos enteros.

   e) $\lessdot : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to Bool$, que compara con la relación $<$ dos enteros.

3. Considerá la función de abstracción $[\![\ ]\!] : Nat \to Bool$ especificada como:

$$[\![n]\!] \equiv n \neq 0$$

Observá que $[\![\ ]\!]$ permite representar un valor *booleano* con un natural n. Por ejemplo el valor *false* puede representarse con el número 0. Especificá formalmente y derivá las siguientes funciones:

   a) $\textcircled{t} : Nat$, que representa a la constante *true*.

   b) $\textcircled{f} : Nat$, que representa a la constante *false*.

   c) $\textcircled{\wedge} : Nat \to Nat \to Nat$, que representa al operador $\wedge$.

   d) $\textcircled{\vee} : Nat \to Nat \to Nat$, que representa al operador $\vee$.

e) $\ominus : Nat \to Nat$, que representa al operador $\neg$.

f) $\oplus : Nat \to Nat \to Nat$, que representa al operador $\equiv$.

4. Considerá la función de abstracción $[\![\ ]\!] : [Bool] \to \{Nat\}$ especificada como:

$$[\![xs]\!] = \langle \bigcup i \ : \ 0 \leq i < \#xs \wedge xs.i \ : \ \{i\} \rangle$$

que permite representar un conjunto de números naturales con una lista de valores *booleanos*. Por ejemplo, el conjunto $\{0, 1, 3, 5\}$ está representado por la lista $[true, true, false, true, false, true]$. Especificá y derivá las siguientes funciones:

a) $\cup : [Bool] \to [Bool] \to [Bool]$, que representa la unión de conjuntos habitual.

b) $\cap : [Bool] \to [Bool] \to [Bool]$, que representa la intersección de conjuntos.

c) $\ominus : [Bool] \to [Bool] \to [Bool]$, que representa la diferencia de conjuntos.

d) $\in : Nat \to [Bool] \to Bool$, que calcula cuando un número natural pertenece a un conjunto representado a través de $[\![\ ]\!]$.

Ayuda:

a) Generalizá la especificación de $[\![\ ]\!]$, obteniendo una función de abstracción $\{\![\ ]\!\}_n$ que además de una lista tome un parámetro extra n, de modo que satisfaga $[\![\ ]\!] = \{\![\ ]\!\}_0$.

b) Obtené una definición recursiva de $\{\![\ ]\!\}_n$ que te permitirá realizar las cuentas de manera mas simple y compacta (recuerde el ejercicio $1c$).

c) Las siguientes propiedades de conjuntos que pueden ser útiles:

$$\begin{array}{lll} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) & A \cup \emptyset = A & A - \emptyset = A \\ (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) & A \cap \emptyset = \emptyset & \emptyset - A = \emptyset \\ A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) & & \end{array}$$