Algoritmos y Estructuras de Datos I - 1º cuatrimestre 2011

Práctico 2b: Ejercicios extras al práctico 2.

Docentes: Javier Blanco, Silvia Pelozo, Natalia Bidart, Demetrio Vilela, Walter Alini

1. Enunciá las reglas de *rango vacío*, *rango unitario*, *partición de rango*, *término*, *término constante*, *distributividad*, y *anidado* para cada uno de los siguientes cuantificadores:

   a) Cuantificador universal ($\forall$)
   b) Cuantificador existencia ($\exists$)
   c) Sumatoria ($\sum$)
   d) Productoria ($\prod$)
   e) Máximo (Max)
   f) Mínimo (Min)
   g) Intesección ($\bigcap$)
   h) Unión ($\bigcup$)

2. Además de las reglas del item anterior, el cuantificador $\forall$ posee un axioma extra, la *regla de intercambio*:

$$\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i : : R.i \Rightarrow T.i \rangle$$

   Utilizando la definición de $\exists$ en función de $\forall$ (De Morgan generalizado), calculá la *regla de intercambio* para $\exists$.

3. Sea $\bigoplus$ el cuantificador asociado a un operador $\oplus$, $R.i$, $S.i$ y $T.i$ predicados arbitrarios. Demostrá:

$$\langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : S.i : T.i \rangle \;=\; \langle \bigoplus i : R.i \vee S.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : R.i \wedge S.i : T.i \rangle$$

4. Demostrá la siguiente relación entre el máximo y el mínimo:

$$\langle \text{Min } i : R.i : -T.i \rangle = -\langle \text{Max } i : R.i : T.i \rangle$$

   Ayuda: utilizá una variable m para denotar el máximo (o mínimo) y partiendo de $m = \langle \text{Min } i : R.i : -T.i \rangle$ intentá llegar a $m = -\langle \text{Max } i : R.i : T.i \rangle$

5. Demostrá que para todo número natural n con $n \geq 4$, se satisface $n! > 2^n$.

6. El siguiente razonamiento intenta demostrar que un grupo cualquiera de gatos está compuesto íntegramente por gatos negros:

   > La demostración es por inducción en el número de gatos del grupo. Para el caso de 0 gatos el resultado es inmediato puesto que cualquier gato del grupo es negro. Consideremos ahora un grupo de $n + 1$ gatos y tomemos un gato cualquiera de ellos. El grupo de los gatos restantes tiene n integrantes y por hipótesis inductiva son todos negros. Luego tenemos n gatos negros y uno apartado cuyo color no podemos predecir. Intercambiemos ahora el gato apartado con uno del grupo de n gatos, el cual sabemos con total seguridad que es negro. Así tenemos por un lado un gato negro y por otro un grupo de n gatos. Nuevamente por hipótesis inductiva, el grupo de n gatos contiene sólo gatos negros, y como el que está apartado también es negro, tenemos que los $n + 1$ gatos son negros.

   ¿Cuál es el error en este intento de demostración?

7. De manera análoga al ejercicio anterior, el siguiente razonamiento intenta demostrar que si en un grupo cualquiera de personas una de ellas es comunista, entonces todas lo son:

   > La demostración es por inducción en el número de personas del grupo. El caso de 0 personas es trivialmente cierto, puesto que el antecedente de la implicación es falso. Para un grupo de 1 persona también es inmediato dado que si el único integrante del grupo es comunista, todo el grupo lo es. Tomemos ahora un grupo de $n + 2$ personas, asumiendo que al menos una de ellas es comunista. Separamos una persona cualquiera del grupo y si esta persona es comunista, entonces la intercambiamos con cualquier otra del grupo para asegurarnos que entre las restantes

$n+1$ personas exista al menos una persona comunista. Luego, por hipótesis inductiva, tenemos un grupo de $n+1$ personas que son todas comunistas, y una persona apartada cuyas simpatías políticas no podemos deducir. Intercambiemos entonces nuevamente esta persona con cualquiera de los integrantes del grupo de $n+1$ personas (que son todas comunistas). Como resultado obtenemos por un lado un comunista, y por otro, un grupo de $n+1$ personas de las cuales con toda seguridad n son comunistas. Por hipótesis inductiva deducimos que los $n+1$ integrantes de este grupo son comunistas, luego las $n+2$ personas son comunistas.

¿Este razonamiento es correcto? en caso negativo, ¿estamos en presencia del mismo error que en el ejercicio anterior?

8. Para las funciones $sum : [Num] \to Num$ y $duplica : [Num] \to [Num]$ definidas recursivamente como:

$$\begin{array}{rcl} sum.[\,] & \doteq & 0 \\ sum.(x \triangleright xs) & \doteq & x + sum.xs \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} duplica.[\,] & \doteq & [\,] \\ duplica.(x \triangleright xs) & \doteq & (2 * x) \triangleright duplica.xs \end{array}$$

   Demostrá que se satisface $sum.(duplica.xs) = 2 * sum.xs$.

9. Siendo $\mathbb{P}(A)$ el conjunto de todos los subconjuntos de A, y $\#(A)$ el cardinal del conjunto A, demuestre que para todo conjunto finito A se satisface $\#(\mathbb{P}(A)) = 2^{\#(A)}$.

10. La función de *Fibonacci*, $fib : Num \to Num$, puede definirse recursivamente como:

$$\begin{array}{rcl} fib.0 & \doteq & 0 \\ fib.1 & \doteq & 1 \\ fib.(n+2) & \doteq & fib.n + fib.(n+1) \end{array}$$

   Demostrar que se satisface $fib.n = \frac{A^n - B^n}{\sqrt{5}}$, donde $A \doteq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $B \doteq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   Ayuda: Demostrar $1 + A = A^2$ y $1 + B = B^2$

11. Sea *fib* la definición recursiva *estándar* para la función de Fibonacci. Calculá la función de Fibolucci, $Fbl : Nat \to Nat$, especificada como:

$$Fbl.n = \langle \sum i \, : \, 0 \leq i < n \, : \, fib.i \times fib.(n-i) \rangle$$