

Algoritmos y Estructuras de Datos I - 1º cuatrimestre 2009

Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos del Cálculo Proposicional

Docentes: Nazareno Aguirre, Renato Cherini, Sergio Giro

A continuación se listan los axiomas y teoremas mas importantes del cálculo proposicional. Recuerde que las letras mayúsculas P, Q y R representan cualquier proposición: p, q, r, \dots ; o cualquier fórmula proposicional: $p \wedge q, p \vee r, (p \equiv q) \wedge r$, etc; o incluso cualquier fórmula de la lógica de primer orden: $\langle \forall i : : i = i \rangle$, $\langle \exists i : 0 \leq i < \#xs : xs.i > 0 \rangle$, etc. Por lo tanto, sustituyendo de manera coherente cualquier mayúscula por una variable proposicional o formula obtenemos una instancia válida de axioma o teorema particular. Por ejemplo, a partir de la sustitución (A9)($P, Q := (p \vee q), p$) obtenemos que $(p \vee q) \vee p \equiv (p \vee q)$ es un axioma válido.

Axiomas

A1 Asociatividad de la Equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad de la Equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro de la Equivalencia:

$$P \equiv \text{true} \equiv P$$

A4 Definición de la Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de false:

$$\text{false} \equiv \neg \text{true}$$

A6 Definición de la Discrepancia:

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad de la Disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad de la Disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia de la Disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Distributividad de la Disyunción respecto a la Equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A12 Regla Dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

A13 Definición de la Implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A14 Definición de la Consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

Teoremas Básicos

T1 Metateorema de true:

Si p está demostrado, $P \equiv \text{true}$

T2 Doble Negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T3 Equivalencia y Negación:

$$P \equiv \neg P \equiv \text{false}$$

T4 Elemento absorbente de la Disyunción:

$$P \vee \text{true} \equiv \text{true}$$

T5 Elemento neutro de la Disyunción:

$$P \vee \text{false} \equiv P$$

T6 Teorema (*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

T7 Negación de la Implicación:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$