Algoritmos y Estructuras de Datos I - 2º cuatrimestre 2011

Práctico 3: Tipos abstractos de datos

Docentes:

Esta guía se centra en la obtención de la implementación de diferentes tipos abstractos de datos. Recordá que no está permitido utilizar el tipo de datos a representar en su propia implementación.

1. Considere la función de abstracción $[\![\ ]\!] : (Nat, Nat) \to Int$ especificada como:

$$[\![(a, b)]\!] = a - b$$

que permite representar un número entero con un par de números naturales. Por ejemplo el número -17 puede estar representado por $(0, 17)$ (también por $(1, 18)$, $(2, 19)$, etc.). Especifique formalmente y derive cada una de las siguientes funciones:

a) $\oplus : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to (Nat, Nat)$, que suma dos enteros representados por $[\![\ ]\!]$.

b) $\ominus : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to (Nat, Nat)$, que resta dos enteros.

c) $\otimes : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to (Nat, Nat)$, que multiplica dos enteros.

d) $\circleddash : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to Bool$, que compara con la relación de igualdad dos enteros.

e) $⧀ : (Nat, Nat) \to (Nat, Nat) \to Bool$, que compara con la relación $<$ dos enteros.

2. Considere la función de abstracción $[\![\ ]\!] : Nat \to Bool$ especificada como:

$$[\![n]\!] \equiv n \neq 0$$

Observe que $[\![\ ]\!]$ permite representar un valor *booleano* con un natural n. Por ejemplo el valor *false* puede representarse con el número 0. Especifique formalmente y derive las siguientes funciones:

a) ⓣ $: Nat$, que representa a la constante *true*.

b) ⓕ $: Nat$, que representa a la constante *false*.

c) $\circledwedge : Nat \to Nat \to Nat$, que representa al operador $\wedge$.

d) $\circledvee : Nat \to Nat \to Nat$, que representa al operador $\vee$.

e) $\circleddash : Nat \to Nat$, que representa al operador $\neg$.

f) $\circledequal : Nat \to Nat \to Nat$, que representa al operador $\equiv$.

3. Considere la función de abstracción $[\![\ ]\!] : [Nat] \to Nat$ especificada como:

$$[\![xs]\!] = \langle \sum i \ : \ 0 \leq i < \#xs \ : \ xs.i \times B^i \rangle$$

que permite representar un número natural dada una base B y una lista de números naturales xs. Por ejemplo el número 17 puede representarse en base 2 con la lista $[1, 0, 0, 0, 1]$ (y aunque *no* es lo esperado también puede representarse en la misma base con la lista $[8, 1]$).

a) Demuestre que la siguiente es una definición recursiva para $[\![\ ]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} [\![\ ]\!] & \doteq & 0 \\ [\![x \triangleright xs]\!] & \doteq & x + B \times [\![xs]\!] \end{array}$$

b) Derive una función $\oplus : [Nat] \to [Nat] \to [Nat]$ que represente la suma de enteros representados con $[\![\ ]\!]$, es decir, que satisfaga la especificación: $[\![xs \oplus ys]\!] = [\![xs]\!] + [\![ys]\!]$.

c) En el ítem anterior Ud. no debería utilizar $[\![\ ]\!]$ como **función recursiva** en la definición que obtuvo. Sin embargo, en el proceso de derivación es válido utilizar de manera indiferente tanto la especificación de $[\![\ ]\!]$ como su definición recursiva, ¿por qué?

d) Defina una función $\otimes : [Nat] \to [Nat] \to [Nat]$ que represente la multiplicación de enteros, satisfaciendo la especificación: $[\![xs \otimes ys]\!] = [\![xs]\!] \times [\![ys]\!]$.

4. Considere la función de abstracción $[\![\ ]\!] : [Bool] \to \{Nat\}$ especificada como:

$$[\![xs]\!] = \langle \bigcup i \,:\, 0 \leq i < \#xs \wedge xs.i \,:\, \{i\} \rangle$$

que permite representar un conjunto de números naturales con una lista de valores *booleanos*. Por ejemplo, el conjunto $\{0, 1, 3, 5\}$ está representado por la lista $[\mathit{true}, \mathit{true}, \mathit{false}, \mathit{true}, \mathit{false}, \mathit{true}]$. Especifique y derive las siguientes funciones:

a) $\bigcirc\!\!\!\!\cup : [Bool] \to [Bool] \to [Bool]$, que representa la unión de conjuntos habitual.

b) $\bigcirc\!\!\!\!\cap : [Bool] \to [Bool] \to [Bool]$, que representa la intersección de conjuntos.

c) $\ominus : [Bool] \to [Bool] \to [Bool]$, que representa la diferencia de conjuntos.

d) $\bigcirc\!\!\!\!\in : Nat \to [Bool] \to Bool$, que calcula cuando un número natural pertenece a un conjunto representado a través de $[\![\ ]\!]$.

Ayuda:

a) Generalice la especificación de $[\![\ ]\!]$, obteniendo una función de abstracción $\{\![\ ]\!\}_n$ que además de una lista tome un parametro extra n, de modo que satisfaga $[\![\ ]\!] = \{\![\ ]\!\}_0$.

b) Obtenga una definición recursiva de $\{\![\ ]\!\}_n$ que le permitirá realizar las cuentas de manera mas simple y compacta (recuerde el ejercicio 3*c*).

c) Las siguientes propiedades de conjuntos que pueden ser útiles:

$$\begin{array}{lll} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) & A \cup \emptyset = A & A - \emptyset = A \\ (A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C) & A \cap \emptyset = \emptyset & \emptyset - A = \emptyset \\ A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) & & \end{array}$$