Práctico 4
Programación imperativa

Algoritmos y Estructuras de Datos I

1. (Algoritmo de la división) Dados dos números, hay que encontrar el cociente y el resto de la división entera entre ellos.

   Ayuda: Para enteros $x \geq 0$ e $y > 0$, el cociente q y el resto r de la división entera de x por y están caracterizados por $x = q * y + r \wedge 0 \leq r \wedge r < y$. Por lo tanto, debemos derivar un programa S que satisfaga

   $\mathsf{Var}\ x, y, q, r : Int;$
   $\{R: \quad x \geq 0 \wedge y > 0\}$ (precondición)
   S
   $\{Q: \quad x = q * y + r \wedge 0 \leq r \wedge r < y\}$ (postcondición)
   donde las variables x y y no cambian.

2. Dado un arreglo $a : array[0, N)\ of Bool$ y suponiendo $\langle \exists\, i\ : 0 \leq i < N :\ a.i \,\rangle$, encontrar la mínima posición k del arreglo tal que $a.k$.

   Ayuda: Buscar una poscondición que permita encontrar el invariante a partir de separar un término en una conjunción.

3. (Búsqueda lineal) Dada $f : Nat \mapsto Bool$ y suponiendo $\langle \exists\, n\ : 0 \leq n :\ f.n \,\rangle$, encontrar el mínimo natural x tal que $f.x$.

4. Sea $N \geq 0$.

   a) Derivar un programa que calcule el menor entero x que satisface $x^3 + x \geq N$.

   b) Derivar un programa que calcule el mayor entero x que satisface $x^3 + x \leq N$.

5. (Suma de los elementos de un arreglo) Dado un arreglo de enteros, se debe devolver en una variable la suma de todos los elementos del arreglo.

   Ayuda: Debemos derivar un programa que satisfaga la siguiente especificación:

   $\mathsf{Const}\ N : Int;$
   $\mathsf{Var}\ a : array\ [0, N)\ of\ Int;$
   $\quad s : Int;$
   $\{R: \quad N \geq 0\}$
   S
   $\{Q: \quad s = \langle \sum i\ : 0 \leq i < N :\ a.i \,\rangle\}$
   donde el arreglo a no cambia.

6. Sea A un arreglo de enteros.

   a) Especificar y derivar un programa que determine si todos los elementos de A son positivos.

   b) Especificar y derivar un programa que determine si algún elemento de A es positivo.

7. Especificar y derivar un programa que guarde en una variable el máximo de los primeros n elementos de un arreglo de tamaño N con $0 < n \leq N$.

   Una vez finalizado el ejercicio pensar como se podría modificar el programa para detectar el caso en que no se cumpla la precondición.

8. Especificar y derivar un programa que calcule la cantidad de elementos pares de un arreglo de enteros.

9. Especificar y derivar un programa que calcule la desviación estándar de los valores almacenados en un arreglo.

   Ayuda: La desviación estandar de n valores $\{x_1, \cdots, x_n\}$ se define como:

   $$\frac{\langle \sum i \ : 1 \leq i \leq n : \ (x_i - \bar{x})^2 \ \rangle}{n}$$

   donde $\bar{x}$ es el promedio de los valores.

10. Especificar y derivar un programa que dado un número devuelva la posición donde se encuentra en un arreglo. Si el elemento no está en el arreglo se debe devolver -1.

11. Considere el ejercicio 6.

    a) En el programa derivado en el ejercicio 6*a* se recorre todo el arreglo? Si la respuesta es afirmativa piense si esto es necesario. Si no lo es busque una manera de derivar un programa equivalente que no recorra innecesariamente todo el arreglo.

    b) Repita el mismo razonamiento sobre el ejercicio 6*b* y derive si es necesario el programa mejorado.

12. Dado un arreglo $a : array[0, N)ofNum$ con $N \geq 0$ determinar si alguno de sus elementos es igual a la suma de los anteriores.

13. Dado un arreglo $a : array[0, N)ofNum$ con $N \geq 0$ determinar si sus elementos son iguales al factorial de la posición.

    Ayuda: Que los elementos sean el factorial de la posición se puede expresar como $\langle \forall i \ : 0 \leq i < N : \ a.i = i! \ \rangle$.

14. Especificar y hacer un programa imperativo que calcule fibonachi de un número dado.

15. Dado un arreglo de enteros, se debe tomar la máxima diferencia entre dos de sus elemento (en orden, el primero menos el segundo).

    La especificación del programa es:

    Const $N : Int$;
    Var $a : array[0, N) \ of \ Int; r : Int$;
    $\{N \geq 2\}$
     S
    $\{r = \langle \text{Max} \ p, q \ : 0 \leq p < q < N : \ a.p - a.q \ \rangle\}$

16. (Segmento de suma máxima) Dado un arreglo de enteros, se debe guardar en una variable la suma del segmento de suma máxima del arreglo.

    La especificación del programa es:

    Const $N : Int$;
    Var $a : array[0, N) \ of \ Int; r : Int$;
    $\{N \geq 0\}$
     S
    $\{r = \langle \text{Max} \ p, q \ : 0 \leq p \leq q \leq N : \ sum.p.q \ \rangle$
       $[\![sum.p.q = \langle \sum i \ : p \leq i < q : \ a.i \ \rangle]\!]\}$

17. Derivar un programa para la siguiente especificación:

    Const $M : Int$;
    Var $a : array[0, M)\ of\ Int; r : Int$;
    $\{M \geq 1\}$
     S
    $\{r = \langle N\, p, q\ : 0 \leq p < q < M :\ a.p * a.q \geq 0\ \rangle\}$

18. Derivar un programa para la siguiente especificación:

    Const $N : Int$;
    Var $a : array[0, N)\ of\ Int; r : Int$;
    $\{N \geq 2\}$
     S
    $\{r = \langle \text{Max}\ \ p, q\ : 0 \leq p < q < N :\ (a.p - a.q)^2\ \rangle\}$

19. Derivar un programa para la siguiente especificación:

    Const $N : Int$;
    Var $a : array[0, N)\ of\ Int; r : Int$;
    $\{N \geq 1\}$
     S
    $\{r \equiv \langle\ \exists p, q\ : 0 \leq p < q < N :\ a.p - a.q \leq 8\ \rangle\}$

    Ayuda: escribir la postcondición usando el operador de mínimo.

20. Especificar y hacer un programa imperativo que tome un arreglo y lo inicialice con el cuadrado de cada posición.

21. Especificar y hacer un programa imperativo que tome un arreglo y lo inicialice con el número de Fibonachi de cada posición.

22. Especificar y hacer un programa imperativo que tome dos arreglos de igual tamaño y devuelva el producto vectorial entre ellos.