

Práctico 1: Cálculo proposicional y Expresiones cuantificadas

Algoritmos y Estructuras de Datos I

El objetivo general de esta guía es retomar la práctica tanto del cálculo proposicional como el de predicados, e introducirnos al cálculo con cuantificadores generales. Se pretende lograr familiaridad con los axiomas y teoremas, sus formas de aplicación, y al mismo tiempo adquirir las habilidades necesarias para resolver las cuentas.

En particular, el extremo detalle solicitado en el ejercicio 1 (requisito que **no** mantendremos en el futuro) intenta llamar la atención sobre el cuidado que debemos prestar cuando realizamos las demostraciones, para no aplicar un axioma o teorema de forma incorrecta. El ejercicio 2 es un pequeño compendio de teoremas que serán utilizados a lo largo de la materia.

A partir del ejercicio 3 se hace hincapié en la ejercitación de las reglas básicas de los cuantificadores, cuyo manejo fluido es un requisito indispensable para el resto de la materia. Notar que utilizamos indiscriminadamente el término “regla” para denotar tanto axiomas como teoremas.

Al final del práctico hay ejercicios extra para hacer si terminó los anteriores antes de comenzar el próximo práctico. Si no los realizó se recomienda hacerlos al momento de estudiar para los exámenes con el fin afianzar los conocimientos.

1. Demostrar los siguientes teoremas del cálculo proposicional con máximo nivel de detalle. Justificar cada paso con el nombre del axioma y/o teorema utilizado, y la correspondiente sustitución. Cuando la regla se aplique en una subfórmula, señálela subrayándola. Por ejemplo, la siguiente es una demostración de $(p \neq (q \neq r)) \equiv ((p \neq q) \neq r)$:

$$\begin{aligned} & (p \neq (q \neq r)) \\ \equiv & \{ \text{(A6 - Definición de } \neq)(P, Q := p, (q \neq r)) \} \\ & \neg(p \equiv (q \neq r)) \\ \equiv & \{ \text{(A6 - Definición de } \neq)(P, Q := q, r) \} \\ & \neg(p \equiv \neg(q \equiv r)) \\ \equiv & \{ \text{(A4 - Definición de } \neg)(P, Q := q, r) \} \\ & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\ \equiv & \{ \text{(A6 - Definición de } \neq)(P, Q := (p \equiv \neg q), r) \} \\ & (p \equiv \neg q) \neq r \\ \equiv & \{ \text{(A6 - Definición de } \neq : \underline{Q} \equiv \neg P \equiv \neg(Q \equiv P))(P, Q := q, p) \} \\ & \neg(p \equiv q) \neq r \\ \equiv & \{ \text{(A6 - Definición de } \neq)(P, Q := p, q) \} \\ & (p \neq q) \neq r \end{aligned}$$

a) *Idempotencia de la conjunción:* $p \wedge p \equiv p$.

b) *Neutro de la conjunción:* $p \wedge \text{True} \equiv p$.

c) *Absorción de la conjunción:* $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

2. Demostrar los siguientes teoremas del cálculo proposicional.

Nota: No hace falta escribir las sustituciones como en el ejercicio anterior. Solo hay que marcar la subfórmula donde se aplica la regla.

Ayuda: Las siguientes heurísticas pueden ser útiles al momento de hacer las demostraciones:

- I) Cuando tengamos una fórmula donde aparezca la conjunción, puede ser útil aplicar la Regla Dorda (**A12**) con el fin de obtener una fórmula con disyunción y equivalencias, para las cuales existen más reglas que se pueden aplicar.
- II) Puede ser útil aplicar distributividad de \vee con \equiv para eliminar paréntesis y poder así aplicar otras reglas.
- III) Si hay que demostrar una equivalencia puede ser útil comenzar con el término más complejo y llegar al término más simple aplicando reglas.

- IV) Para resolver un ejercicio se pueden utilizar los resultados obtenidos en ejercicios previos.
- V) Una vez demostrado Morgan (ejercicios 2f 2g), si un ejercicio es parecido a uno anterior reemplazando \wedge por \vee (o a la inversa) puede ser útil introducir una doble negación (**T2**), aplicar Morgan y ver si se puede utilizar aquel ejercicio previo.
- VI) Una vez demostrada Contrarecíproca (ejercicio 2e), si un ejercicio es parecido a uno anterior reemplazando \Rightarrow por \Leftarrow y \wedge por \vee (o a la inversa) puede ser útil aplicar aquella regla para poder utilizar el ejercicio previo.
- VII) Una vez demostradas distributividades entre \wedge y \vee (ejercicios 2h 2i) probar utilizarlas para eliminar paréntesis.

a) Absorción de la disyunción: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b) Debilitamiento para \wedge : $p \wedge q \Rightarrow p$.

c) Debilitamiento para \vee : $p \Rightarrow p \vee q$.

d) Relación entre \Rightarrow y \vee : $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

Ayuda: Usar Teorema (*)

e) Contrarrecíproca: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

Ayuda: Usar Teorema (*)

f) De Morgan para \wedge : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

g) De Morgan para \vee : $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Ayuda: Usar la anterior (ver heurísticas).

h) Distributividad de \vee con \wedge : $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

i) Distributividad de \wedge con \vee : $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Ayuda: Usar la anterior (ver heurísticas).

j) Intercambio para \Rightarrow : $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.

k) Implicación de la disyunción: $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.

l) Distributividad de \Rightarrow con respecto a \wedge : $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

Ayuda: Usar la anterior (ver heurísticas).

m) Relación de \equiv con \wedge y \vee : $p \equiv q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

3. Defina de manera recursiva y utilizando el formalismo básico (lenguaje del teórico) las siguientes definiciones con cuantificadores.

Nota: Para poder implementar los cuantificadores extenderemos un poco la notación para indicar el rango R de la cuantificación como la lista de valores que lo satisface:

$$\left\langle \bigoplus i : i \in R : T.i \right\rangle ,$$

con el operador pertenece (\in) sobre listas, que determina si un valor es un elemento de la lista:

$$\begin{aligned} i \in [] &\equiv False \\ i \in x \triangleright xs &\equiv (i = x) \vee i \in xs \end{aligned}$$

Ayuda: Hacer inducción sobre el rango (lista R).

- a) La función *paratodo*, que dada una lista de valores $R : [A]$ y un predicado $T : A \rightarrow Bool$ (predicado sobre elementos en A), determina si todos los elementos en R hacen verdadero el predicado T , es decir:

$$\left| \begin{array}{l} \text{paratodo} : [A] \rightarrow (A \rightarrow Bool) \rightarrow Bool \\ \text{paratodo}.R.T \equiv \langle \forall i : i \in R : T.i \rangle \end{array} \right|$$

- b) La función *existe*, que dada una lista de valores $R : [A]$ y un predicado $T : A \rightarrow Bool$, determina si algún elemento en R hace verdadero el predicado T , es decir:

$$\left| \begin{array}{l} \text{existe} : [A] \rightarrow (A \rightarrow Bool) \rightarrow Bool \\ \text{existe}.R.T \equiv \langle \exists i : i \in R : T.i \rangle \end{array} \right|$$

- c) La función *sumatoria*, que dada una lista de valores $R : [A]$ y una función $T : A \rightarrow Num$ (toma elementos de A y devuelve números), calcula la suma de la aplicación de T a los elementos en R es decir:

$$\left| \begin{array}{l} \text{sumatoria} : [A] \rightarrow (A \rightarrow Num) \rightarrow Num \\ \text{sumatoria}.R.T \equiv \langle \sum i : i \in R : T.i \rangle \end{array} \right.$$

- d) La función *productoria*, que dada una lista de valores $R : [A]$ y una función $T : A \rightarrow Num$, calcula el producto de la aplicación de T a los elementos de R , es decir:

$$\left| \begin{array}{l} \text{productoria} : [A] \rightarrow (A \rightarrow Num) \rightarrow Num \\ \text{productoria}.R.T \equiv \langle \prod i : i \in R : T.i \rangle \end{array} \right.$$

4. Los ejercicios del punto 3 son similares: se aplica la función término T a cada elemento de la lista rango R y luego se aplica algún operador entre todos los elementos transformados, obteniéndose así el resultado final.

Guiándose por esta observación, definir de manera recursiva y utilizando el formalismo básico, la función *cuantGen* (denota la cuantificación generalizada) que tomando como argumento un operador, su neutro, una lista rango de la cuantificación y una función término de la cuantificación, aplica el operador a los elementos del rango transformados por la función término:

$$\left| \begin{array}{l} \text{cuantGen} : (B \rightarrow B \rightarrow B) \rightarrow B \rightarrow [A] \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B \\ \text{cuantGen}. \oplus .z.R.T \equiv \langle \oplus i : i \in R : T.i \rangle \end{array} \right.$$

con z el neutro del operador \oplus .

5. Enuncie las reglas de *rango vacío*, *rango unitario*, *partición de rango*, *término*, *término constante*, *distributividad*, y *anidado* para cada uno de los siguientes cuantificadores:

- | | | |
|---|----------------------------|---------------------------|
| a) Cuantificador universal (\forall) | d) Productoria (\prod) | g) Intesección (\cap) |
| b) Cuantificador existencia (\exists) | e) Máximo (Max) | h) Unión (\cup) |
| c) Sumatoria (\sum) | f) Mínimo (Min) | |

6. Verificar que se cumplan las reglas de rango vacío y unitario en los ejercicios 3b, 3c y 4. Para ello plantear la regla utilizando la función y demostrar la proposición desplegando la definición.

Por ejemplo, el rango unitario para la función *paratodo* (3a) se plantea y demuestra de la siguiente forma:

Planteo de la regla:

$$\text{paratodo}.[N].T \equiv T.N$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & \text{paratodo}.[N].T \\ \equiv & \{ \text{Constructor } \triangleright \} \\ & \text{paratodo}.(N \triangleright []).T \\ \equiv & \{ \text{Desplegado función (caso inductivo)} \} \\ & T.N \wedge \text{paratodo}.[].T \\ \equiv & \{ \text{Desplegado función (caso base)} \} \\ & T.N \wedge True \\ \equiv & \{ \text{Neutro conjunción} \} \\ & T.N \end{aligned}$$

7. Además de las reglas generales de cuantificadores, el cuantificador \forall posee un axioma extra, la *regla de intercambio*:

$$\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i :: R.i \Rightarrow T.i \rangle$$

Utilizando la definición de \exists en función de \forall (De Morgan generalizado), calcule la *regla de intercambio* para \exists .

8. El cuantificador aritmético de *conteo* N está definido utilizando la sumatoria:

$$\langle N i : R.i : T.i \rangle \doteq \langle \sum i : R.i \wedge T.i : 1 \rangle$$

a) Enuncie y demuestre las reglas de *rango vacío*, *rango unitario* y *partición de rango* para N .

b) Demuestre $\langle \sum i : R.i \wedge T.i : k \rangle = \langle N i : R.i : T.i \rangle \times k$

9. Demuestre las siguientes reglas:

a) *Distributividad de \forall respecto a \Rightarrow* :

$$\langle \forall i : R.i : Z \Rightarrow T.i \rangle \equiv Z \Rightarrow \langle \forall i : R.i : T.i \rangle$$

¿Qué restricciones se deben establecer sobre Z ?

b) *Instanciación de \forall* :

$$\langle \forall i : : T.i \rangle \Rightarrow T.x$$

donde x es una variable libre

¿Como sería la regla de instanciación para \exists ? Enúnciela y demuéstrela.

c) *Intercambio para \forall (generalizada)*:

$$\langle \forall i : R.i \wedge S.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i : R.i : S.i \Rightarrow T.i \rangle$$

10. Demuestre la siguiente relación entre el máximo y el mínimo:

$$\langle \text{Min } i : R.i : -T.i \rangle = -\langle \text{Max } i : R.i : T.i \rangle$$

Ayuda: utilice una variable m para denotar el máximo (o mínimo) y partiendo de $m = \langle \text{Min } i : R.i : -T.i \rangle$ intentá llegar a $m = -\langle \text{Max } i : R.i : T.i \rangle$

11. (**Separación de un término 2D**) Suponga que \oplus es un cuantificador asociado a un operador genérico \oplus , que es conmutativo y asociativo (así como el \forall es el cuantificador asociado a la conjunción \wedge). Demuestre las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} a) \quad \langle \oplus i, j : 0 \leq i \leq j < n + 1 : T.i.j \rangle = \\ \langle \oplus i, j : 0 \leq i \leq j < n : T.i.j \rangle \oplus \langle \oplus i : 0 \leq i < n + 1 : T.i.n \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \langle \oplus i, j : 0 \leq i \leq j < n + 1 : T.i.j \rangle = \\ \langle \oplus j : 0 \leq j < n + 1 : T.0.j \rangle \oplus \langle \oplus i, j : 0 \leq i \leq j < n : T.(i+1).(j+1) \rangle \end{aligned}$$

Ayuda: Escribir las desigualdades en el rango $0 \leq i \leq j < n + 1$ como $0 \leq i \wedge i \leq j \wedge j < n + 1$, aplicar anidado, partición de rango y rango unitario. Puede ser útil esquematizar el rango en ejes cartesianos.

Ejercicios extra

1. Suponga que \oplus es un cuantificador asociado a un operador genérico \oplus , que es conmutativo y asociativo (así como el \forall es el cuantificador asociado a la conjunción \wedge). Suponga además que Z es una constante, y $R.i.j$ y $T.i.j$ predicados arbitrarios (posiblemente dependientes de i y j). Demuestre la siguiente *regla de eliminación de variable dummy*:

$$\langle \oplus i, j : i = Z \wedge R.i.j : T.i.j \rangle \equiv \langle \oplus j : R.Z.j : T.Z.j \rangle$$

- a) ¿Es estrictamente necesario que Z sea constante?
 b) El \exists es el cuantificador asociado a la disyunción \vee , y éste es asociativo y conmutativo. Por lo tanto, la regla anterior vale para el \exists . ¿se puede utilizar esta regla para demostrar

$$\langle \exists x, y : x = y : P.x.y \rangle \equiv \langle \exists x : P.x.x \rangle ?$$

2. Sólo utilizando las reglas del término, término constante, intercambio, anidado, distributividad, De Morgan e instanciación, demuestre las siguientes reglas para el cuantificador universal:

- a) $\langle \forall i : R.i : True \rangle \equiv True$
 b) *Partición de rango*
 c) *Partición de rango generalizada*
 d) *Cambio de variable*

Ayuda: Puede demostrar las siguientes implicaciones por separado. Para la segunda, puede además utilizar la primera.

- $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \Rightarrow \langle \forall j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$
- $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \Leftarrow \langle \forall j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$ para f invertible

3. (**Separación de un término 2D**) Suponga que \oplus es un cuantificador asociado a un operador genérico \oplus conmutativo y asociativo. Demuestre las siguientes reglas:

- a) $\langle \oplus i, j : 0 \leq i < j < n + 1 : T.i.j \rangle =$
 $\langle \oplus i, j : 0 \leq i < j < n : T.i.j \rangle \oplus \langle \oplus i : 0 \leq i < n : T.i.n \rangle$
 b) $\langle \oplus i, j : 0 \leq i < j < n + 1 : T.i.j \rangle =$
 $\langle \oplus j : 0 \leq j < n : T.0.(j + 1) \rangle \oplus \langle \oplus i, j : 0 \leq i \leq j < n : T.(i + 1).(j + 1) \rangle$

4. Sea \oplus el cuantificador asociado a un operador \oplus , $R.i$, $S.i$ y $T.i$ predicados arbitrarios. Demuestre:

$$\langle \oplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \oplus i : S.i : T.i \rangle = \langle \oplus i : R.i \vee S.i : T.i \rangle \oplus \langle \oplus i : R.i \wedge S.i : T.i \rangle$$