

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos del Cálculo Proposicional y Expresiones Cuantificadas

A continuación se listan los axiomas y teoremas mas importantes del cálculo proposicional. Recuerde que las letras mayúsculas P, Q y R representan cualquier proposición: p, q, r, \dots ; o cualquier fórmula proposicional: $p \wedge q, p \vee r, (p \equiv q) \wedge r$, etc; o incluso cualquier fórmula de la lógica de primer orden: $\langle \forall i :: i = i \rangle$, $\langle \exists i : 0 \leq i < \#xs : xs.i > 0 \rangle$, etc. Por lo tanto, sustituyendo de manera coherente cualquier mayúscula por una variable proposicional o formula obtenemos una instancia válida de axioma o teorema particular. Por ejemplo, a partir de la sustitución **(A8)**($P, Q := (p \vee q), p$) obtenemos que $(p \vee q) \vee p \equiv p \vee (p \vee q)$ es un axioma válido.

Axiomas

A1 Asociatividad de la Equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad de la Equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro de la Equivalencia:

$$P \equiv True \equiv P$$

A4 Definición de la Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de *False*:

$$False \equiv \neg True$$

A6 Definición de la Discrepancia:

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad de la Disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad de la Disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia de la Disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Distributividad de la Disyunción respecto a la Equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A12 Regla Dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

A13 Leibniz:

$$e = f \Rightarrow E(z := e) = E(z := f)$$

A14 Definición de la Implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A15 Definición de la Consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

Teoremas Básicos

T1 Metateorema de *True*:

Si P está demostrado, $P \equiv True$

T2 Doble Negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T3 Equivalencia y Negación:

$$P \equiv \neg P \equiv False$$

T4 Elemento absorbente de la Disyunción:

$$P \vee True \equiv True$$

T5 Elemento neutro de la Disyunción:

$$P \vee False \equiv P$$

T6 Conmutatividad de la Conjunción:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

T7 Asociatividad de la Conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T8 Teorema (*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

Precedencia

4. \neg
3. \vee, \wedge
2. \Rightarrow, \Leftarrow
1. \equiv, \neq

Expresiones cuantificadas

A16 (Rango vacío): $\langle \oplus i : False : T \rangle = e$

– e el elemento neutro de \oplus .

A17 (Rango unitario): $\langle \oplus i : i = N : T.i \rangle = T.N$

A18 (Partición de rango): $\langle \oplus i : R \vee S : T \rangle = \langle \oplus i : R : T \rangle \oplus \langle \oplus i : S : T \rangle$

– \oplus es idempotente o R y S son disjuntos.

A19 (Partición de rango generalizada):

$$\langle \oplus i : \langle \exists j : S.i.j : R.i.j \rangle : T.i \rangle = \langle \oplus i, j : S.i.j \wedge R.i.j : T.i \rangle$$

– \oplus es idempotente.

A20 (Regla del término): $\langle \oplus i : R : T \oplus G \rangle = \langle \oplus i : R : T \rangle \oplus \langle \oplus i : R : G \rangle$

A21 (Término constante): $\langle \oplus i : R : C \rangle = C$

– i no aparece en C

– $C \oplus C = C$ (\oplus es idempotente para C)

– R es no vacío.

A22 (Distributividad): $\langle \oplus i : R : x \otimes T \rangle = x \otimes \langle \oplus i : R : T \rangle$

– \otimes distributivo a izquierda con \oplus

– R es no vacío o el neutro de \oplus es absorbente para \otimes

– i no aparece en x .

Análogamente, $\langle \oplus i : R : T \otimes x \rangle = \langle \oplus i : R : T \rangle \otimes x$

– \otimes distributivo a derecha con \oplus

– R es no vacío o el neutro de \oplus es absorbente para \otimes

– i no aparece en x .

A23 (Anidado): $\langle \oplus i, j : R.i \wedge S.i.j : T.i.j \rangle = \langle \oplus i : R.i : \langle \oplus j : S.i.j : T.i.j \rangle \rangle$

T9 (Cambio de variable): $\langle \oplus i : R.i : T.i \rangle = \langle \oplus j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$

– f tiene inversa en R

– j no aparece en R y T .

T10 (Separación de un término): Si $n : Nat$ ($n \geq 0$)

$$\begin{aligned} \langle \oplus i : 0 \leq i < n + 1 : T.i \rangle &= T.0 \oplus \langle \oplus i : 0 \leq i < n : T.(i + 1) \rangle \\ \langle \oplus i : 0 \leq i < n + 1 : T.i \rangle &= \langle \oplus i : 0 \leq i < n : T.i \rangle \oplus T.n \end{aligned}$$

A24 (Intercambio): $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i : R.i \Rightarrow T.i \rangle$
 $\langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i \wedge T.i \rangle$

A25 (De Morgan): $\neg \langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : \neg T.i \rangle$
 $\neg \langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i : R.i : \neg T.i \rangle$

A26 (Definición de conteo): $\langle Ni : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \sum i : R.i \wedge T.i : 1 \rangle$

A27 (Definición de máximo y mínimo): Si el rango R es no vacío entonces

$$\begin{aligned} z &= \langle \text{Max } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : F.i \leq z \rangle \\ z &= \langle \text{Min } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : z \leq F.i \rangle \end{aligned}$$