Digesto para la programación imperativa

Algoritmos y Estructuras de Datos I

1. **Relación weakest precondition y terna de Hoare:**

$[wp.S.Q = P] \iff \begin{cases} (i)\ \{P\}\ S\ \{Q\} \\ (ii)\ \{P_0\}\ S\ \{Q\} \Rightarrow [P_0 \Rightarrow P] \end{cases}$	$\{P\}\ S\ \{Q\} \equiv [P \Rightarrow wp.S.Q]$

2. **Skip:**

Verificación con terna de Hoare:	Weakest precondition:	Programa anotado:
$\{P\}\ skip\ \{Q\} \equiv [P \Rightarrow Q]$	$[wp.skip.Q \equiv Q]$	$\{Q\}$ $skip$ $\{Q\}$

3. **Abort:**

Verificación con terna de Hoare:	Weakest precondition:	Programa anotado:
$\{P\}\ abort\ \{Q\} \equiv [P \equiv False]$	$[wp.abort.Q \equiv False]$	$\{False\}$ $abort$ $\{Q\}$

4. **Asignación:**

Verificación con terna de Hoare:	Weakest precondition:	Programa anotado:
$\{P\}$ $x := E \equiv [P \Rightarrow Q(x := E)]$ $\{Q\}$	$[wp.(x := E).Q \equiv Q(x := E)]$	$\{Q(x := E)\}$ $x := E$ $\{Q\}$

Si no se asumen bien definidas las expresiones E:

Verificación con terna de Hoare:	Weakest precondition:
$\{P\}$ $x := E \equiv [P \Rightarrow def.E \wedge Q(x := E)]$ $\{Q\}$	$[wp.(x := E).Q \equiv Q(x := E) \wedge Def.E]$
Programa anotado: $\{Q(x := E) \wedge Def.E\}$ $x := E$ $\{Q\}$	

5. **Composición o concatenación de sentencias:**

Verificación con terna de Hoare:	Weakest precondition:
$\{P\}\ S;T\ \{Q\} \equiv$ Existe R tal que $\{P\}\ S\ \{R\} \wedge \{R\}\ T\ \{Q\}$	$[wp.(S;T).Q \equiv wp.S.(wp.T.Q)]$

Programa anotado:

$$\begin{array}{c} \{P\} \\ S \\ \{R\} \\ T \\ \{Q\} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \{P\} \\ S \\ \{R\} \end{array} \wedge \begin{array}{c} \{R\} \\ T \\ \{Q\} \end{array} \quad \textbf{o} \quad \begin{array}{c} \{wp.S.(wp.T.Q)\} \\ S \\ \{wp.T.Q\} \\ T \\ \{Q\} \end{array}$$

6. **Alternativa (if):**

Verificación con ternas de Hoare:

$$
\begin{array}{llll}
\{P\} & \textbf{if} \;\; B_0 \rightarrow S_0 \quad \{Q\} & \equiv & [P \Rightarrow (B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n)] \\
 & \square \;\; B_1 \rightarrow S_1 & & \wedge\{B_0 \wedge P\}\ S_0\ \{Q\} \\
 & \vdots & & \wedge\{B_1 \wedge P\}\ S_1\ \{Q\} \\
 & \square \;\; B_n \rightarrow S_n & & \vdots \\
 & \textbf{fi} & & \wedge\{B_n \wedge P\}\ S_n\ \{Q\}
\end{array}
$$

Weakest precondition:

$$wp.if.Q \equiv [(B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n) \wedge (B_0 \Rightarrow wp.S_0.Q) \wedge \ldots \wedge (B_n \Rightarrow wp.S_n.Q)]$$

Programa anotado:

$$
\begin{array}{lcl}
\{P \wedge (B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n)\} & & \{(B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n) \wedge \\
 & & (B_0 \Rightarrow wp.S_0.Q) \wedge \ldots \wedge (B_n \Rightarrow wp.S_n.Q)\} \\
\textbf{if } B_0 \rightarrow & & \textbf{if } B_0 \rightarrow \\
\quad \{B_0 \wedge P\} & & \quad \{B_0 \wedge wp.S_0.Q\} \\
\quad S_0 & & \quad S_0 \\
\quad \{Q\} & & \quad \{Q\} \\
\square \; B_1 \rightarrow & & \square \; B_1 \rightarrow \\
\quad \{B_1 \wedge P\} & & \quad \{B_1 \wedge wp.S_1.Q\} \\
\quad S_1 & \textbf{o} & \quad S_1 \\
\quad \{Q\} & & \quad \{Q\} \\
\vdots & & \vdots \\
\square \; B_n \rightarrow & & \square \; B_n \rightarrow \\
\quad \{B_n \wedge P\} & & \quad \{B_n \wedge wp.S_n.Q\} \\
\quad S_n & & \quad S_n \\
\quad \{Q\} & & \quad \{Q\} \\
\textbf{fi} & & \textbf{fi} \\
\{Q\} & & \{Q\}
\end{array}
$$

7. **Teorema de invariancia:**

Verificación con ternas de Hoare:

$$
\begin{array}{lcl}
\{P\} & \equiv & \text{Existe } I \text{ (invariante) tal que} \\
\textbf{do } B \rightarrow & & [P \Rightarrow I] \\
\quad S & & \wedge[I \wedge \neg B \Rightarrow Q] \\
\textbf{od} & & \wedge\{I \wedge B\}\ S\ \{I\} \\
\{Q\} & & \wedge \text{ Existe } t : Estados \mapsto Int \text{ tal que} \quad \textbf{(terminación)} \\
 & & \quad \text{(i) } [I \wedge B \Rightarrow t \geq 0] \\
 & & \quad \text{(ii) } \{I \wedge B \wedge t = T\}\ S\ \{t < T\}
\end{array}
$$

Programa anotado:

$$
\begin{array}{lcl}
\{I\} & & [I \wedge B \Rightarrow t \geq 0] \quad \textbf{(terminación)} \\
\textbf{do } B \rightarrow & & \textbf{do } B \rightarrow \\
\quad \{I \wedge B\} & & \quad \{I \wedge B \wedge t = T\} \\
\quad S & \boldsymbol{y} & \quad S \\
\quad \{I\} & & \quad \{t < T\} \\
\textbf{od} & & \textbf{od} \\
\{I \wedge \neg B\} & &
\end{array}
$$

8. **Anotaciones Secuenciales**

$\begin{array}{c}\{R\}\\ \{P\}\\ S\\ \{Q\}\end{array} \quad \equiv \quad [R \Rightarrow P] \ \wedge \ \begin{array}{c}\{P\}\\ S\\ \{Q\}\end{array}$	$\begin{array}{c}\{P\}\\ S\\ \{Q\}\\ \{R\}\end{array} \quad \equiv \quad \begin{array}{c}\{P\}\\ S\\ \{Q\}\end{array} \ \wedge \ [Q \Rightarrow R]$

9. **Propiedades**

- $\{P\}\ S\ \{False\} \ \equiv\ [P \equiv False]$ (Exclusión de milagros)
- $[wp.S.False \equiv False]$
- $[wp.S.Q \wedge wp.S.R \ \equiv\ wp.S.(Q \wedge R)]$
- $[wp.S.Q \vee wp.S.R \ \Rightarrow\ wp.S.(Q \vee R)]$