# Práctico 1: Cálculo proposicional y Expresiones cuantificadas

Algoritmos y Estructuras de Datos I

1$^{\text{er}}$ cuatrimestre 2015

*El objetivo general de esta guía es retomar la práctica tanto del cálculo proposicional como del de predicados, e introducirnos al cálculo con cuantificadores generales. Se pretende lograr familiaridad con los axiomas y teoremas, sus formas de aplicación, y al mismo tiempo adquirir las habilidades necesarias para resolver las cuentas.*

*En particular, el extremo detalle solicitado en el ejercicio 1 (requisito que* ***no*** *mantendremos en el futuro) intenta llamar la atención sobre el cuidado que debemos prestar cuando realizamos las demostraciones, para no aplicar un axioma o teorema de forma incorrecta. El ejercicio 2 es un pequeño compendio de teoremas que serán utilizados a lo largo de la materia.*

*A partir del ejercicio 3 se hace hincapié en la ejercitación de las reglas básicas de los cuantificadores, cuyo manejo fluido es un requisito indispensable para el resto de la materia. Notar que utilizamos indiscriminadamente el término "regla" para denotar tanto axiomas como teoremas.*

*Al final del práctico hay ejercicios extra para hacer si se terminaron los anteriores antes de comenzar el práctico siguiente. Si no los realizó, se recomienda hacerlos al momento de estudiar para los exámenes con el fin afianzar los conocimientos.*

1. Demostrar los siguientes teoremas del cálculo proposicional con máximo nivel de detalle. Justificar cada paso con el nombre del axioma y/o teorema utilizado, y la correspondiente sustitución. Cuando la regla se aplique en una subfórmula, señálela subrayándola. Por ejemplo, la siguiente es una demostración de $(p \not\equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \not\equiv q) \not\equiv r)$:

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\
\equiv & \{\ (\mathbf{A6}\text{ - Definición de } \not\equiv)(P, Q := p, (q \not\equiv r))\ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\
\equiv & \{\ (\mathbf{A6}\text{ - Definición de } \not\equiv)(P, Q := q, r)\ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\
\equiv & \{\ (\mathbf{A4}\text{ - Definición de } \neg)(P, Q := q, r)\ \} \\
 & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\
\equiv & \{\ (\mathbf{A6}\text{ - Definición de } \not\equiv)(P, Q := (p \equiv \neg q), r)\ \} \\
 & \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{\ (\mathbf{A6}\text{ - Definición de } \not\equiv : \underline{Q \equiv \neg P} \equiv \neg(Q \equiv P))(P, Q := q, p)\ \} \\
 & \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{\ (\mathbf{A6}\text{ - Definición de } \not\equiv)(P, Q := p, q)\ \} \\
 & (p \not\equiv q) \not\equiv r
\end{array}
$$

   a) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$.
   b) *Neutro de la conjunción*: $p \wedge True \equiv p$.
   c) *Absorción de la conjunción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

2. Demostrar los siguientes teoremas del cálculo proposicional.

   **Nota:** No hace falta escribir las sustituciones como en el ejercicio anterior. Solo hay que marcar la subfórmula donde se aplica la regla.

   **Ayuda:** Las las siguientes heurísticas pueden ser útiles al momento de hacer las demostraciones:

   I) Cuando tengamos una fórmula donde aparezca la conjunción, puede ser útil aplicar la Regla Dorada (**A12**) con el fin de obtener una fórmula con disyunción y equivalencias, para las cuales existen más reglas que se pueden aplicar.
   II) Puede ser útil aplicar distributividad de $\vee$ con $\equiv$ para eliminar paréntesis y poder así aplicar otras reglas.

III) Si hay que demostrar una equivalencia puede ser útil comenzar con el término más complejo y llegar al termino más simple aplicando reglas.

IV) Para resolver un ejercicio se pueden utilizar los resultados obtenidos en ejercicios previos.

V) Una vez demostrado Morgan (ejercicios 2*f* 2*g*), si un ejercicio es parecido a uno anterior reemplazando $\wedge$ por $\vee$ (o a la inversa) puede ser útil introducir una doble negación (**T2**), aplicar Morgan y ver si se puede utilizar aquel ejercicio previo.

VI) Una vez demostrada Contrarecíproca (ejercicio 2*e*), si un ejercicio es parecido a uno anterior reemplazando $\Rightarrow$ por $\Leftarrow$ y $\wedge$ por $\vee$ (o a la inversa) puede ser útil aplicar aquella regla para poder utilizar el ejercicio previo.

VII) Una vez demostradas distributividades entre $\wedge$ y $\vee$ (ejercicios 2*h* 2*i*) probar utilizarlas para eliminar paréntesis.

*a*) *Absorción de la disyunción*: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

*b*) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.

*c*) *Debilitamiento para* $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.

*d*) *Relación entre* $\Rightarrow$ *y* $\vee$: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.
**Ayuda:** Usar Teorema (*)

*e*) *Contrarrecíproca*: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.
**Ayuda:** Usar Teorema (*)

*f*) *De Morgan para* $\wedge$: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

*g*) *De Morgan para* $\vee$: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
**Ayuda:** Usar la anterior (ver heurísticas).

*h*) *Distributividad de* $\vee$ *con* $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

*i*) *Distributividad de* $\wedge$ *con* $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
**Ayuda:** Usar la anterior (ver heurísticas).

*j*) *Intercambio para* $\Rightarrow$: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.

*k*) *Implicación de la disyunción*: $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.

*l*) *Distributividad de* $\Rightarrow$ *con respecto a* $\wedge$: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.
**Ayuda:** Usar la anterior (ver heurísticas).

*m*) *Relación de* $\equiv$ *con* $\wedge$ *y* $\vee$: $p \equiv q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

3. Defina de manera recursiva y utilizando el formalismo básico (lenguaje del teórico) las siguientes definiciones con cuantificadores.

**Nota:** Para poder implementar los cuantificadores extenderemos un poco la notación para indicar el rango $R$ de la cuantificación como la lista de valores que lo satisface:

$$\left\langle \bigoplus i \ : i \in R : \ T.i \right\rangle \ ,$$

con el operador pertenece ( $\in$ ) sobre listas, que determina si un valor es un elemento de la lista:

$$\begin{array}{rcl} i \in [\,] & \equiv & False \\ i \in x \triangleright xs & \equiv & (i = x) \ \vee \ i \in xs \end{array}$$

Como vemos la lista $R$ **representa** un conjunto de valores. De aquí en adelante supondremos que la lista $R$ no tiene elementos repetidos.

*a*) La función *paratodo*, que dada una lista de valores $R : [A]$ y un predicado $T : A \to Bool$ (predicado sobre elementos en $A$), determina si todos los elementos en $R$ hacen verdadero el predicado $T$, es decir:

$$\begin{array}{|l} paratodo : [A] \to (A \to Bool) \to Bool \\ \hline paratodo.R.T \equiv \langle \forall i \ : i \in R : \ T.i \,\rangle \end{array}$$

**Ayuda:** Hacer inducción sobre la lista $R$.

*b*) La función *existe*, que dada una lista de valores $R : [A]$ y un predicado $T : A \to Bool$, determina si algún elemento en $R$ hace verdadero el predicado $T$, es decir:

$$\begin{array}{|l} existe : [A] \to (A \to Bool) \to Bool \\ \hline existe.R.T \equiv \langle \exists i \ : i \in R : \ T.i \rangle \end{array}$$

*c*) La función *sumatoria*, que dada una lista de valores $R : [A]$ y una función $T : A \to Num$ (toma elementos de $A$ y devuelve números), calcula la suma de la aplicación de $T$ a los elementos en $R$ es decir:

$$\begin{array}{|l} sumatoria : [A] \to (A \to Num) \to Num \\ \hline sumatoria.R.T \equiv \langle \sum i \ : i \in R : \ T.i \rangle \end{array}$$

*d*) La función *productoria*, que dada una lista de valores $R : [A]$ y una función $T : A \to Num$, calcula el producto de la aplicación de $T$ a los elementos de $R$, es decir:

$$\begin{array}{|l} productoria : [A] \to (A \to Num) \to Num \\ \hline productoria.R.T \equiv \langle \prod i \ : i \in R : \ T.i \rangle \end{array}$$

4. Los ejercicios del punto 3 son similares: se aplica la función término $T$ a cada elemento de la lista rango $R$ y luego se aplica algún operador entre todos los elementos transformados, obteniendose así el resultado final.

   Guiándose por esta observación, definir de manera recursiva y utilizando el formalismo básico, la función *cuantGen* (denota la cuantificación generalizada) que tomando como argumento un operador, su neutro, una lista rango de la cuantificación y una función término de la cuantificación, aplica el operador a los elementos del rango transformados por la función término:

$$\begin{array}{|l} cuantGen : (B \to B \to B) \to B \to [A] \to (A \to B) \to B \\ \hline cuantGen. \oplus .z.R.T \equiv \langle \bigoplus i \ : i \in R : \ T.i \rangle \end{array}$$

   con $z$ el neutro del operador $\oplus$.

5. Enuncie las reglas de *rango vacío*, *rango unitario*, *partición de rango*, *término*, *término constante*, *distributividad*, y *anidado* para cada uno de los siguientes cuantificadores:

   *a*) Cuantificador universal ($\forall$)
   *b*) Cuantificador existencia ($\exists$)
   *c*) Sumatoria ($\sum$)
   *d*) Productoria ($\prod$)
   *e*) Máximo (Max)
   *f*) Mínimo (Min)
   *g*) Intesección ($\bigcap$)
   *h*) Unión ($\bigcup$)

6. Verificar que se cumplan las reglas de rango vacío y unitario en los ejercicios 3*b*, 3*c* y 4. Para ello plantear la regla utilizando la función y demostrar la proposición desplegando la definición.

   Por ejemplo, el rango unitario para la función *paratodo* (3*a*) se plantea y demuestra de la siguiente forma:

   Planteo de la regla:
   $paratodo.[N].T \equiv T.N$

   Demostración:
   $paratodo.[N].T$
   $\equiv$ { Constructor $\triangleright$ }
   $paratodo.(N \triangleright [\,]).T$
   $\equiv$ { Desplegado función (caso inductivo) }
   $T.N \wedge paratodo.[].T$
   $\equiv$ { Desplegado función (caso base) }
   $T.N \wedge True$
   $\equiv$ { Neutro conjunción }
   $T.N$

7. Además de las reglas generales de cuantificadores, el cuantificador $\forall$ posee un axioma extra, la *regla de intercambio*:

$$\langle \forall i \, : \, R.i \, : \, T.i \rangle \equiv \langle \forall i \, : \, : \, R.i \Rightarrow T.i \rangle$$

Utilizando la definición de $\exists$ en función de $\forall$ (De Morgan generalizado), calcule la *regla de intercambio* para $\exists$.

8. El cuantificador aritmético de *conteo* N está definido utilizando la sumatoria:

$$\langle \mathrm{N}\, i \, : R.i : \, T.i \, \rangle \doteq \langle \sum i \, : R.i \wedge T.i : \, 1 \, \rangle$$

   *a*) Enuncie y demuestre las reglas de *rango vacío*, *rango unitario* y *partición de rango* para N.

   *b*) Demuestre $\langle \sum i \, : \, R.i \wedge T.i \, : \, k \rangle = \langle \mathrm{N} i \, : \, R.i \, : \, T.i \rangle \times k$

9. Demuestre las siguientes reglas:

   *a*) *Distributividad de* $\forall$ *respecto a* $\Rightarrow$:

$$\langle \forall i \, : \, R.i \, : \, Z \Rightarrow T.i \rangle \equiv Z \Rightarrow \langle \forall i \, : \, R.i \, : \, T.i \rangle$$

   ¿Qué restricciones se deben establecer sobre $Z$?

   *b*) *Instanciación de* $\forall$:

$$\langle \forall i \, : \, : \, T.i \rangle \Rightarrow T.x$$

   donde $x$ es una variable libre

   ¿Como sería la regla de instanciación para $\exists$? Enúnciela y demuéstrela.

   *c*) *Intercambio para* $\forall$ *(generalizada)*:

$$\langle \forall i \, : \, R.i \wedge S.i \, : \, T.i \rangle \equiv \langle \forall i \, : \, R.i \, : \, S.i \Rightarrow T.i \rangle$$

10. Demuestre la siguiente relación entre el máximo y el mínimo:

$$\langle \mathrm{Min} \; i \, : \, R.i \, : \, -T.i \rangle = -\langle \mathrm{Max} \; i \, : \, R.i \, : \, T.i \rangle$$

**Ayuda:** utilice una variable $m$ para denotar el máximo (o mínimo) y partiendo de $m = \langle \mathrm{Min} \; i \, : \, R.i \, : \, -T.i \rangle$ intentá llegar a $m = -\langle \mathrm{Max} \; i \, : \, R.i \, : \, T.i \rangle$

## Ejercicios extra

1. Suponga que $\bigoplus$ es un cuantificador asociado a un operador genérico $\oplus$, que es conmutativo y asociativo (así como el $\forall$ es el cuantificador asociado a la conjunción $\wedge$). Suponga ademas que $Z$ es una constante, y $R.i.j$ y $T.i.j$ predicados arbitrarios (posiblemente dependientes de $i$ y $j$). Demuestre la siguiente *regla de eliminación de variable* dummy:

$$\langle \bigoplus i, j \,:\, i = Z \wedge R.i.j \,:\, T.i.j \rangle \equiv \langle \bigoplus j \,:\, R.Z.j \,:\, T.Z.j \rangle$$

   *a*) ¿Es estrictamente necesario que $Z$ sea constante?

   *b*) El $\exists$ es el cuantificador asociado a la disyunción $\vee$, y éste es asociativo y conmutativo. Por lo tanto, la regla anterior vale para el $\exists$. ¿se puede utilizar esta regla para demostrar

$$\langle \exists x, y \,:\, x = y \,:\, P.x.y \rangle \equiv \langle \exists x \,:\,:\, P.x.x \rangle \ ?$$

2. Sólo utilizando las reglas del término, término constante, intercambio, anidado, distributividad, De Morgan e instanciación, demuestre las siguientes reglas para el cuantificador universal:

   *a*) $\langle \forall i \,:\, R.i \,:\, True \rangle \equiv True$

   *b*) *Partición de rango*

   *c*) *Partición de rango generalizada*

   *d*) *Cambio de variable*

   **Ayuda:** Puede demostrar las siguientes implicaciones por separado. Para la segunda, puede además utilizar la primera.

   - $\langle \forall i \,:\, R.i \,:\, T.i \rangle \Rightarrow \langle \forall j \,:\, R.(f.j) \,:\, T.(f.j) \rangle$
   - $\langle \forall i \,:\, R.i \,:\, T.i \rangle \Leftarrow \langle \forall j \,:\, R.(f.j) \,:\, T.(f.j) \rangle$ para $f$ *invertible*

3. **(Separación de un término 2D)** Suponga que $\bigoplus$ es un cuantificador asociado a un operador genérico $\oplus$ conmutativo y asociativo. Demuestre las siguientes reglas:

   *a*) $\langle \bigoplus\ i, j \ : 0 \leq i \leq j < n+1 :\ T.i.j \ \rangle =$
   $\langle \bigoplus\ i, j \ : 0 \leq i \leq j < n :\ T.i.j \ \rangle \oplus \langle \bigoplus\ i \ : 0 \leq i < n+1 :\ T.i.n \ \rangle$

   *b*) $\langle \bigoplus\ i, j \ : 0 \leq i \leq j < n+1 :\ T.i.j \ \rangle =$
   $\langle \bigoplus\ j \ : 0 \leq j < n+1 :\ T.0.j \ \rangle \oplus \langle \bigoplus\ i, j \ : 0 \leq i \leq j < n :\ T.(i+1).(j+1) \ \rangle$

   **Ayuda:** Escribir las desigualdades en el rango $0 \leq i \leq j < n+1$ como $0 \leq i \wedge i \leq j \wedge j < n+1$, aplicar anidado, partición de rango y rango unitario en una de las variables. Puede ser útil esquematizar el rango en ejes cartesianos para visualizar el resultado.

4. Sea $\bigoplus$ el cuantificador asociado a un operador $\oplus$, $R.i$, $S.i$ y $T.i$ predicados arbitrarios. Demuestre:

$$\langle \bigoplus i \,:\, R.i \,:\, T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i \,:\, S.i \,:\, T.i \rangle \ = \ \langle \bigoplus i \,:\, R.i \vee S.i \,:\, T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i \,:\, R.i \wedge S.i \,:\, T.i \rangle$$