

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos del Cálculo Proposicional y Expresiones Cuantificadas

Axiomas del cálculo proposicional

A1 Asociatividad de la Equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad de la Equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro de la Equivalencia:

$$P \equiv \text{True} \equiv P$$

A4 Definición de la Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de *False*:

$$\text{False} \equiv \neg \text{True}$$

A6 Definición de la Discrepancia:

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad de la Disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad de la Disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia de la Disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Distributividad de la Disyunción respecto a la Equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A12 Regla Dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

A13 Leibniz:

$$e = f \Rightarrow E(z := e) = E(z := f)$$

A14 Definición de la Implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A15 Definición de la Consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

Teoremas del cálculo proposicional

T1 Metateorema de *True*:

Si P está demostrado, $P \equiv \text{True}$

T2 Doble Negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T3 Equivalencia y Negación:

$$P \equiv \neg P \equiv \text{False}$$

T4 Elemento absorbente de la Disyunción:

$$P \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

T5 Elemento neutro de la Disyunción:

$$P \vee \text{False} \equiv P$$

T6 Conmutatividad de la Conjunción:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

T7 Asociatividad de la Conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T8 Teorema (*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

Precedencia

4. \neg

3. \vee, \wedge

2. \Rightarrow, \Leftarrow

1. \equiv, \neq

Axiomas de cuantificadores

A16 (Rango vacío): $\langle \bigoplus i : False : T \rangle = e$

– e es el elemento neutro de \oplus ($a \oplus e = a$).

A17 (Rango unitario): $\langle \bigoplus i : i = N : T.i \rangle = T.N$

A18 (Partición de rango): $\langle \bigoplus i : R.i \vee S.i : T.i \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : S.i : T.i \rangle$

– \oplus es idempotente ($a \oplus a = a$) ó R y S son disjuntos (no hay i tal que $R.i \wedge S.i$).

A19 (Partición de rango generalizada):

$$\left\langle \bigoplus i : \langle \exists j : S.i.j : R.i.j \rangle : T.i \right\rangle = \left\langle \bigoplus i, j : S.i.j \wedge R.i.j : T.i \right\rangle$$

– \oplus es idempotente ($a \oplus a = a$).

A20 (Regla del término): $\langle \bigoplus i : R : T \oplus G \rangle = \langle \bigoplus i : R : T \rangle \oplus \langle \bigoplus i : R : G \rangle$

A21 (Término constante): $\langle \bigoplus i : R : C \rangle = C$

– i no aparece en C

– $C \oplus C = C$ (\oplus es idempotente para C)

– R es no vacío.

A22 (Distributividad): $\langle \bigoplus i : R : x \otimes T \rangle = x \otimes \langle \bigoplus i : R : T \rangle$

– \otimes distributivo a izquierda con \oplus

– R es no vacío o el neutro de \oplus es absorbente para \otimes

– i no aparece en x .

Análogamente, $\langle \bigoplus i : R : T \otimes x \rangle = \langle \bigoplus i : R : T \rangle \otimes x$

– \otimes distributivo a derecha con \oplus

– R es no vacío o el neutro de \oplus es absorbente para \otimes

– i no aparece en x .

A23 (Anidado): $\langle \bigoplus i, j : R.i \wedge S.i.j : T.i.j \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : \langle \bigoplus j : S.i.j : T.i.j \rangle \rangle$

A24 (Intercambio): $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i :: R.i \Rightarrow T.i \rangle$

$$\langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i :: R.i \wedge T.i \rangle$$

A25 (De Morgan): $\neg \langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : \neg T.i \rangle$

$$\neg \langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i : R.i : \neg T.i \rangle$$

A26 (Definición de conteo): $\langle N i : R.i : T.i \rangle = \langle \sum i : R.i \wedge T.i : 1 \rangle$

A27 (Definición de máximo y mínimo): Si el rango R es no vacío entonces

$$z = \langle \text{Max } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : F.i \leq z \rangle$$

$$z = \langle \text{Min } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : z \leq F.i \rangle$$

Teoremas sobre cuantificadores

T9 (Cambio de variable): $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle = \langle \bigoplus j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$

– f tiene inversa en R

– j no aparece en R y T .

Algunos cuantificadores concretos

Cuantificador (\bigoplus)	Operador (\oplus)	Neutro (e)	Absorbente	Idempotente?
\forall	\wedge	<i>True</i>	<i>False</i>	sí
\exists	\vee	<i>False</i>	<i>True</i>	sí
\sum	$+$	0	(no tiene)	no
\prod	\times	1	0	no
Max	<i>max</i>	$-\infty$	$+\infty$	sí
Min	<i>min</i>	$+\infty$	$-\infty$	sí