Algoritmos y Estructuras de Datos I
Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos del Cálculo Proposicional y Expresiones Cuantificadas

Axiomas del cálculo proposicional

A1 Asociatividad de la Equivalencia:
$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad de la Equivalencia:
$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro de la Equivalencia:
$$P \equiv True \equiv P$$

A4 Definición de la Negación:
$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de $False$:
$$False \equiv \neg\, True$$

A6 Definición de la Discrepancia:
$$P \not\equiv Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad de la Disyunción:
$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad de la Disyunción:
$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia de la Disyunción:
$$P \vee P \equiv P$$

A10 Distributividad de la Disyunción respecto a la Equivalencia:
$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 Tercero excluido:
$$P \vee \neg P$$

A12 Regla Dorada:
$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

A13 Leibniz:
$$e = f \Rightarrow E(z := e) = E(z := f)$$

A14 Definición de la Implicación:
$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A15 Definición de la Consecuencia:
$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

Teoremas del cálculo proposicional

T1 Metateorema de $True$:
Si P está demostrado, $P \equiv True$

T2 Doble Negación:
$$\neg\neg P \equiv P$$

T3 Equivalencia y Negación:
$$P \equiv \neg P \equiv False$$

T4 Elemento absorbente de la Disyunción:
$$P \vee True \equiv True$$

T5 Elemento neutro de la Disyunción:
$$P \vee False \equiv P$$

T6 Conmutatividad de la Conjunción:
$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

T7 Asociatividad de la Conjunción:
$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T8 Teorema $(*)$:
$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

Precedencia

4. $\neg$
3. $\vee$, $\wedge$
2. $\Rightarrow$, $\Leftarrow$
1. $\equiv$, $\not\equiv$

Axiomas de cuantificadores

A16 (Rango vacío): $\langle \bigoplus i \ : False : \ T \rangle = e$

– e es elemento neutro de $\oplus$ $(a \oplus e = a)$

A17 (Rango unitario): $\langle \bigoplus i \ : i = C : \ T.i \rangle = T.C$

– i no aparece en C

A18 (Partición de rango): $\langle \bigoplus i \ : R.i \vee S.i : \ T.i \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i \ : S.i : \ T.i \rangle$

– $\oplus$ es idempotente $(a \oplus a = a)$ ó R y S son disjuntos (no hay i tal que $R.i \wedge S.i$)

A19 (Regla del término): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \oplus U.i \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i \ : R.i : \ U.i \rangle$

A20 (Término constante): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ C \rangle = C$

– i no aparece en C
– $C \oplus C = C$ ($\oplus$ es idempotente para C)
– R es no vacío

A21 (Distributividad): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ C \otimes T.i \rangle = C \otimes \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle$

– i no aparece en C
– $\otimes$ distributivo a izquierda con $\oplus$
– R es no vacío o el neutro de $\oplus$ es absorbente para $\otimes$

Análogamente, $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \otimes C \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \otimes C$

– i no aparece en C
– $\otimes$ distributivo a derecha con $\oplus$
– R es no vacío o el neutro de $\oplus$ es absorbente para $\otimes$

A22 (Anidado): $\langle \bigoplus i, j \ : R.i \wedge S.i.j : \ T.i.j \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ \langle \bigoplus j \ : S.i.j : \ T.i.j \rangle \rangle$

A23 (Intercambio):
$\langle \forall i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \forall i \ :: \ R.i \Rightarrow T.i \rangle$
$\langle \exists i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \exists i \ :: \ R.i \wedge T.i \rangle$

A24 (De Morgan):
$\neg \langle \forall i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ \neg T.i \rangle$
$\neg \langle \exists i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \forall i \ : R.i : \ \neg T.i \rangle$

A25 (Definición de conteo): $\langle N\, i \ : R.i : \ T.i \rangle = \langle \sum i \ : R.i \wedge T.i : \ 1 \rangle$

A26 (Definición de máximo y mínimo): Si el rango R es no vacío entonces

$$z = \langle \mathrm{Max} \ i \ : R.i : \ F.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i \ : R.i : \ F.i \leq z \rangle$$
$$z = \langle \mathrm{Min} \ i \ : R.i : \ F.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i \ : R.i : \ z \leq F.i \rangle$$

Teoremas sobre cuantificadores

T9 (Cambio de variable): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle = \langle \bigoplus j \ : R.(f.j) : \ T.(f.j) \rangle$

– f tiene inversa en R
– j no aparece en R y T.

Algunos cuantificadores concretos

Cuantificador ($\bigoplus$)	Operador ($\oplus$)	Neutro (e)	Absorbente	Idempotente?
$\forall$	$\wedge$	$True$	$False$	sí
$\exists$	$\vee$	$False$	$True$	sí
$\sum$	$+$	0	(no tiene)	no
$\prod$	$\times$	1	0	no
Max	max	$-\infty$	$+\infty$	sí
Min	min	$+\infty$	$-\infty$	sí