Práctico 1: Cálculo proposicional y Expresiones cuantificadas

Algoritmos y Estructuras de Datos I
2^{do} cuatrimestre 2016

Un objetivo de esta guía es retomar la práctica del cálculo proposicional y de predicados, e introducirnos al cálculo con cuantificadores generales. Otro objetivo es recuperar la práctica en la definición de funciones recursivas y demostraciones por inducción. Lograr familiaridad con los axiomas y teoremas del cálculo, y habilidad en las demostraciones es necesario para poder encarar la tarea de derivación y demostración de programas que encararemos de aquí en adelante.

1. Demostrá los siguientes teoremas del cálculo proposicional utilizando únicamente los axiomas del digesto. Cuando el axioma se aplique en una subfórmula, subrayala para ayudar a distinguir la corrección del paso aplicado. Por ejemplo, la siguiente es una demostración de $(p \not\equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \not\equiv q) \not\equiv r)$:

$$
\begin{array}{ll}
 & (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \not\equiv \ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \not\equiv \ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \neg \ \} \\
 & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \not\equiv \ \} \\
 & \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \not\equiv \ \} \\
 & \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \not\equiv \ \} \\
 & (p \not\equiv q) \not\equiv r
\end{array}
$$

   a) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$.

   b) *Neutro de la conjunción*: $p \wedge True \equiv p$.

   c) *Absorción de la conjunción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

2. Los siguientes teoremas van a ser de mucha utilidad a lo largo de toda la materia, por lo tanto es útil recordarlos. Demostralos utilizando los axiomas y teoremas del cálculo proposicional listados en el digesto (y cualquier otro teorema que se te ocurra y demuestres, claro).

   a) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.

   b) *Debilitamiento para* $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.

   c) *Relación entre* $\Rightarrow$ *y* $\vee$: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

   d) *Contrarrecíproca*: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

   e) *De Morgan para* $\wedge$: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

   f) *De Morgan para* $\vee$: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

   g) *Distributividad de* $\vee$ *con* $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   h) *Distributividad de* $\wedge$ *con* $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   i) *Intercambio para* $\Rightarrow$: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.

   j) *Implicación de la disyunción*: $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.

   k) *Distributividad de* $\Rightarrow$ *con respecto a* $\wedge$: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

3. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural.

   a) $\langle \forall i \ : (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \ xs.i > 0 \, \rangle$

b) $\langle \exists i \ : (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \ xs.i = x \rangle$

c) $\langle \forall i \ : (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \ \langle \exists j \ : (0 \leq j) \wedge (j < \#xs) : \ xs.i = ys.j \rangle \rangle$

d) $\langle \forall i \ : (0 \leq i) \wedge (i < \#xs - 1) : \ xs.i < xs.(i+1) \rangle$

4. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evaluá la fórmula en las siguientes listas:

   a) $xs = [-5, -3, 4, 8]$

   b) $xs = [11, 2, 5, 8]$

   Para el ítem *b*), considerar $x = 5$. Para el ítem *c)*, considerar $ys = [2, -3, 11, 5, 8]$.

   Ejemplo: Fórmula $4.a$) aplicada a $xs = [-5, -3, 4, 8]$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle \forall i \ : (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \ xs.i > 0 \rangle \\
\equiv & \{ \text{ calculo rango sabiendo que } \#xs = 4 \ \} \\
 & \langle \forall i \ : i \in \{0, 1, 2, 3\} : \ xs.i > 0 \rangle \\
\equiv & \{ \text{ aplico el término a cada elemento del rango } \} \\
 & (xs.0 > 0) \wedge (xs.1 > 0) \wedge (xs.2 > 0) \wedge (xs.3 > 0) \\
\equiv & \{ \text{ evalúo las indexaciones con } xs = [-5, -3, 4, 8] \ \} \\
 & (-5 > 0) \wedge (-3 > 0) \wedge (4 > 0) \wedge (8 > 0) \\
\equiv & \{ \text{ evalúo las desigualdades } \} \\
 & False \wedge False \wedge True \wedge True \\
\equiv & \{ \text{ resuelvo las conjunciones } \} \\
 & False
\end{array}
$$

5. Escribí fórmulas para las siguientes expresiones en lenguaje natural.

   a) Todos los elementos de xs e ys son iguales (*¡ojo! ¡sujeta a interpretación!*).

   b) Todos los elementos de xs ocurren en ys una sola vez.

   c) Todos los elementos de xs ocurren en ys en la misma posición.

6. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural.

   a) $\langle \exists i, j \ : (2 \leq i < n) \wedge (2 \leq j < n) : \ i * j = n \rangle$

   b) $\langle \prod i \ : 1 \leq i \leq n : \ i \rangle$

   c) $\dfrac{\langle \sum i : 0 \leq i < \#xs : xs.i \rangle}{\#xs}$

   d) $\langle \text{Max } i \ : 0 \leq i < \#xs : \ xs.i \rangle < \langle \text{Min } i \ : 0 \leq i < \#ys : \ ys.i \rangle$

   Observación: Las desigualdades de la forma $A \leq B < C$ son abuso de notación para $(A \leq B) \wedge (B < C)$.

7. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evaluá respectivamente con los siguientes valores:

   a) $n = 5$.

   b) $n = 5$.

   c) $xs = [6, 9, 3, 9, 8]$.

   d) $xs = [-3, 9, 8], ys = [6, 7, 8]$.

8. Escribí fórmulas para las siguientes expresiones en lenguaje natural. Responder: ¿Qué tipo tiene cada expresión?

   a) n es potencia de 2.

   b) n es el elemento más grande de xs.

   c) El producto de los elementos pares de xs.

   d) La suma de los elementos en posición par de xs.

9. Definí recursivamente una función *todos* : $[Bool] \rightarrow Bool$ que verifica que todos los elementos de una lista son $True$, es decir, que satisface la siguiente especificación:

$$todos.xs \equiv \langle \forall i \ : (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \ xs.i \rangle$$

10. Suponiendo que $f : A \to Bool$ es una función fija cualquiera, y $xs : [A]$. Caracterizá con una fórmula la siguiente función recursiva:

$$algunosf : [A] \to Bool$$

$$algunosf.[\,] = False$$
$$algunosf.(x \triangleright xs) = f.x \vee algunosf.xs$$

11. Enunciá los axiomas de *rango vacío*, *rango unitario*, *partición de rango* y *término constante* para cada uno de los siguientes cuantificadores:

   a) Cuantificador universal ($\forall$)
   b) Cuantificador existencia ($\exists$)
   c) Sumatoria ($\sum$)
   d) Productoria ($\prod$)
   e) Máximo (Max)
   f) Mínimo (Min)
   g) Intesección ($\bigcap$)
   h) Unión ($\bigcup$)

12. Demostra el siguiente teorema sobre $\forall$, utilizando los axiomas y teoremas del digesto:

   - *Intercambio para $\forall$ (generalizada)*: $\langle \forall i \,:\, R.i \wedge S.i \,:\, T.i \rangle \equiv \langle \forall i \,:\, R.i \,:\, S.i \Rightarrow T.i \rangle$

13. Demostrá la siguiente relación entre los cuantificadores de máximo y mínimo:

$$z = \langle \text{Min } i \,:\, R.i \,:\, -T.i \rangle \equiv z = -\langle \text{Max } i \,:\, R.i \,:\, T.i \rangle$$

14. Definí recursivamente las siguientes funciones.

   a) La función *paratodo*, que dada una lista de valores $xs : [A]$ y un predicado $T : A \to Bool$, determina si todos los elementos en xs hacen verdadero el predicado T, es decir:

$$paratodo : [A] \to (A \to Bool) \to Bool$$

$$paratodo.xs.T \equiv \langle \forall i \,:\, (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \, T.(xs.i) \rangle$$

   Puede ser de ayuda recordar la función del ejercicio 9.

   b) La función *existe*, que dada una lista de valores $xs : [A]$ y un predicado $T : A \to Bool$, determina si algún elemento en xs hace verdadero el predicado T, es decir:

$$existe : [A] \to (A \to Bool) \to Bool$$

$$existe.xs.T \equiv \langle \exists i \,:\, (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \, T.(xs.i) \rangle$$

   Puede ser de ayuda recordar la función del ejercicio 10.

   c) La función *sumatoria*, que dada una lista de valores $xs : [A]$ y una función $T : A \to Num$ (toma elementos de A y devuelve números), calcula la suma de la aplicación de T a los elementos en xs es decir:

$$sumatoria : [A] \to (A \to Num) \to Num$$

$$sumatoria.xs.T \equiv \langle \sum i \,:\, (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \, T.(xs.i) \rangle$$

   d) La función *productoria*, que dada una lista de valores $xs : [A]$ y una función $T : A \to Num$, calcula el producto de la aplicación de T a los elementos de xs, es decir:

$$productoria : [A] \to (A \to Num) \to Num$$

$$productoria.xs.T \equiv \langle \prod i \,:\, (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \, T.(xs.i) \rangle$$

15. Todas las funciones del ejercicio 14 son similares entre sí: cada una aplica la función término T a todos los elementos de una lista, y luego aplica algún operador entre todos ellos, obteniendose así el resultado final. Para el caso de la lista vacía, se devuelve el elemento neutro.

   Guiándote por esta observación, definí de manera recursiva la función *cuantGen* (denota la cuantificación generalizada) que tomando como argumento un operador, su elemento neutro, una lista de elementos y una función término, aplica el operador a los elementos de la lista, transformados por la función término:

$$cuantGen : (B \to B \to B) \to B \to [A] \to (A \to B) \to B$$

$$cuantGen. \oplus .z.xs.T = \langle \bigoplus i \,:\, (0 \leq i) \wedge (i < \#xs) : \, T.(xs.i) \rangle$$