Práctico 4: Introducción al cálculo de programas imperativos

Algoritmos y Estructuras de Datos I
2^{do} cuatrimestre 2015

1. Para cada uno de los siguientes programas, calculá la precondición más débil y las anotaciones intermedias.

(a) $\mathsf{Var}\ x, y : Num;$
$\{\qquad\qquad\}$
$x := x + y;$
$\{x = 6 \wedge y = 5\}$

(b) $\mathsf{Var}\ x : Num;$
$\{\qquad\}$
$x := 8$
$\{x = 8\}$

(c) $\mathsf{Var}\ x : Num;$
$\{\qquad\}$
$x := 8$
$\{x = 7\}$

(d) $\mathsf{Var}\ x, y : Num;$
$\{\qquad\}$
$x, y := y, x$
$\{x = B \wedge y = A\}$

(e) $\mathsf{Var}\ x, y, a : Num;$
$\{\qquad\qquad\}$
$a, x := x, y$
$\{\qquad\qquad\}$
$y := a$
$\{x = B \wedge y = A\}$

(f) $\mathsf{Var}\ x, y : Num;$
$\{\qquad\}$
$\textbf{if}\ x \geq y \rightarrow$
  $\{\qquad\}$
  $x := 0$
  $\{\qquad\qquad\}$
$\Box\ x \leq y \rightarrow$
  $\{\qquad\}$
  $x := 2$
  $\{\qquad\qquad\}$
$\textbf{fi}$
$\{(x = 0 \vee x = 2) \wedge y = 1\}$

2. Demostrá que las siguientes ternas de Hoare son correctas. En todos los casos las variables x, y son de tipo Int, y a, b de tipo $Bool$.

(a) $\{True\}$
$\textbf{if}\ x \geq 1 \rightarrow x := x + 1$
$\Box\ x \leq 1 \rightarrow x := x - 1$
$\textbf{fi}$
$\{x \neq 1\}$

(b) $\{x \neq y\}$
$\textbf{if}\ x > y \rightarrow \textbf{skip}$
$\Box\ x < y \rightarrow x, y := y, x$
$\textbf{fi}$
$\{x > y\}$

(c) $\{True\}$
$x, y := y * y, x * x;$
$\textbf{if}\ x \geq y \rightarrow x := x - y$
$\Box\ x \leq y \rightarrow y := y - x$
$\textbf{fi}$
$\{x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$

(d) $\{True\}$
$\textbf{if}\ \neg a \vee b \rightarrow a := \neg a$
$\Box\ a \vee \neg b \rightarrow b := \neg b$
$\textbf{fi}$
$\{a \vee b\}$

(e) $\{N \geq 0\}$
$x := 0;$
$\textbf{do}\ x \neq N \rightarrow x := x + 1$
$\textbf{od}$
$\{x = N\}$

(f) $\{True\}$
$r := N;$
$\textbf{do}\ r \neq 0 \rightarrow$
  $\textbf{if}\ r < 0 \rightarrow r := r + 1$
  $\Box\ r > 0 \rightarrow r := r - 1$
  $\textbf{fi}$
$\textbf{od}$
$\{r = 0\}$

3. Para cada uno de los siguientes programas, calculá expresiones $\mathbf{E}$ y $\mathbf{F}$ de modo que se validen las anotaciones.

(a) $\mathsf{Var}\ x, y : Nat;$
$\{True\}$
$x, y := x + 1, \mathbf{E}$
$\{y = x + 1\}$

(b) $\mathsf{Var}\ a, q, c, w : Num;$
$\{q = a * c \wedge w = c^2\}$
$a, q := a + c, \mathbf{E}$
$\{q = a * c\}$

(c) Const $A, B : Nat$;
Var $q, r : Nat$;
$\{A = q * B + r\}$
$q := \mathbf{E}$; $r := r - B$
$\{A = q * B + r\}$

(d) Const $N : Num$;
Var $x, y, p, q : Num$;
$\{x * y + p * q = N\}$
$x := x - p$;
$q := \mathbf{F}$
$\{x * y + p * q = N\}$

4. Especificá los siguientes problemas, enunciando una pre y una postcondición, y luego derivá programas imperativo a partir de ellas.

    (a) Calcular el mínimo de dos valores enteros.

    (b) Calcular el valor absoluto de un número entero.

5. Demostrá que si la terna de Hoare (a) es correcta, entonces la (b) también lo es:

    (a) $\{P\}$
    if $B_0 \to S_0$
    $\square$ $B_1 \to S_1$
    fi
    $\{Q\}$

    (b) $\{P\}$
    if $B_0 \to S_0$
    $\square$ $\neg B_0 \to S_1$
    fi
    $\{Q\}$

    ¿Qué utilidad tiene esta propiedad cuando se programa en lenguaje como C?

6. Analizá cada uno de los siguientes programas anotados. En cada caso, describí en lenguaje natural la postcondición y decidí si efectivamente el programa valida las anotaciones.

    (a) Const $N : Num$;
    Var $s, i : Num$;
    $a : array[0, N)\ of Num$;
    $\{N \geq 0\}$
    $i, s := 0, 0$
    do $i \neq N \to$
    $s := s + a.i$
    od
    $\{s = \langle \sum k\ : 0 \leq k < N :\ a.i \rangle\}$

    (b) Const $N : Num$;
    Var $s, i : Num$;
    $a : array[0, N)\ of Num$;
    $\{N \geq 0\}$
    $i, s := 0, 0$
    do $i \neq N \to$
    $i := i + 1$
    $s := s + a.i$
    od
    $\{s = \langle \sum k\ : 0 \leq k < N :\ a.i \rangle\}$

    (c) Const $N : Num$;
    Var $s, i : Num$;
    $a : array[0, N)\ of Num$;
    $\{N \geq 0\}$
    $i, s := -1, 0$
    do $i \neq N \to$
    $i := i + 1$
    $s := s + a.i$
    od
    $\{s = \langle \sum k\ : 0 \leq k < N :\ a.i \rangle\}$

    (d) Const $N : Num$;
    Var $i : Num$; $r : Bool$;
    $a : array[0, N)\ of Num$;
    $\{N \geq 0\}$
    $i, r := 0, False$
    do $i \neq N \wedge \neg r \to$
    if $a.i = e \to r := True$
    $\square$ $a.i \neq e \to$ **skip**
    fi
    $i := i + 1$
    od
    $\{\langle \exists k\ : 0 \leq k < N :\ a.k = e \rangle \Rightarrow a.i = e\}$

7. Decidí si los siguientes predicados son invariantes del ciclo del programa $6.(b)$. Justificá apropiadamente:

    (a) $\{1 \leq i\}$

    (b) $\{0 \leq i\}$

    (c) $\{0 \leq i \leq N\}$

    (d) $\{s = \langle \sum k\ : 0 \leq k < N :\ a.i \rangle\}$

    (e) $\{0 \leq s \leq \langle \sum k\ : 0 \leq k < N :\ a.i \rangle\}$

8. Considerá los siguientes programas que intercambian los valores de dos variables x e y de tipo Int:

$$x, y := y, x \qquad\qquad \begin{array}{l} z := x; \\ x := y; \\ y := z \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} x := x - y; \\ y := x + y; \\ x := y - x \end{array}$$

Especificá la pre y postcondición, y *verificá* que cada uno de los programas las satisface.

9. Derivá un programa para calcular el máximo común divisor entre dos enteros positivos, lo que puede especificarse como:

   Const $X, Y : Int$;
   Var $x, y : Int$;
   $\{X > 0 \wedge Y > 0 \wedge x = X \wedge y = Y\}$
   S
   $\{x = mcd.X.Y\}$

   Utilizá como invariante $\{x > 0 \wedge y > 0 \wedge mcd.x.y = mcd.X.Y\}$. Para encontrar el programa S pueden ser útiles las siguientes propiedades del mcd:

   (a) $mcd.x.x = x$
   (b) $mcd.x.y = mcd.y.x$
   (c) $x > y \;\Rightarrow\; mcd.x.y = mcd.(x - y).y$
   (d) $y > x \;\Rightarrow\; mcd.x.y = mcd.x.(y - x)$

10. Considerá las siguientes definiciones recursivas de la función $exp.x.y$, especificada como $exp.x.y = x^y$:

    (i) $$exp.x.y \;=\; \begin{array}{l} (\;\; y = 0 \to 1 \\ \;\square\; y \neq 0 \to x * exp.x.(y-1) \\ ) \end{array}$$

    (ii) $$exp.x.y \;=\; \begin{array}{l} (\;\; y = 0 \to 1 \\ \;\square\; y \neq 0 \to \begin{array}{l} (\;\; y \bmod 2 = 0 \to exp.(x*x).(y \div 2) \\ \;\square\; y \bmod 2 = 1 \to x * exp.x.(y-1) \\ ) \end{array} \\ ) \end{array}$$

    Derivá *dos* programas que satisfagan la postcondición $\{r = exp.X.Y\}$, utilizando como precondición $\{x = X \wedge y = Y \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$, y como invariante $\{y \geq 0 \wedge r * x^y = X^Y\}$. Para cada programa usá una de las definiciones de exp. Tené en cuenta las mismas a la hora de decidir la manera de achicar la cota.

11. Suponiendo $N > 0$, derivá un programa que devuelva en la variable k la mayor potencia de 2, menor o igual que N. Esto puede especificarse con la postcondición $\{0 < k \leq n \wedge n < 2*k \wedge \langle \exists j \;: 0 \leq j :\; k = 2^j \rangle\}$. Para el ciclo, utilizá como invariante $\{0 < k \leq n \wedge \langle \exists j \;: 0 \leq j :\; k = 2^j \rangle\}$.