

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos del Cálculo Proposicional y Expresiones Cuantificadas

Cálculo Proposicional

Equivalencia

A1 Asociatividad de la Equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad de la Equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro de la Equivalencia:

$$P \equiv True \equiv P$$

A4 Definición de la Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de *False*:

$$False \equiv \neg True$$

A6 Definición de la Discrepancia:

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad de la Disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad de la Disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia de la Disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A11 Leibniz:

$$e = f \Rightarrow E(z := e) = E(z := f)$$

Teoremas

T1 Doble Negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T2 Equivalencia y Negación:

$$P \equiv \neg P \equiv False$$

T3 Elemento absorbente de la Disyunción:

$$P \vee True \equiv True$$

T4 Elemento neutro de la Disyunción:

$$P \vee False \equiv P$$

T5 Conmutatividad de la Conjunción:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

T6 Asociatividad de la Conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T7 Leibniz 2 (reemplazo de iguales por iguales):

$$e = f \wedge E(z := e) \equiv e = f \wedge E(z := f)$$

Precedencia de Operadores

4. \neg

3. \vee, \wedge

2. \Rightarrow, \Leftarrow

1. \equiv, \neq

Cuantificadores

Axiomas

A12 (Rango vacío): $\langle \bigoplus i : False : T \rangle = e$

– e es elemento neutro de \oplus ($a \oplus e = a$)

A13 (Rango unitario): $\langle \bigoplus i : i = C : T.i \rangle = T.C$

– i no aparece en C

A14 (Partición de rango): $\langle \bigoplus i : R.i \vee S.i : T.i \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : S.i : T.i \rangle$

– \oplus es idempotente ($a \oplus a = a$) ó R y S son disjuntos (no hay i tal que $R.i \wedge S.i$)

A15 (Regla del término): $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \oplus U.i \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : R.i : U.i \rangle$

A16 (Término constante): $\langle \bigoplus i : R.i : C \rangle = C$

– i no aparece en C

– $C \oplus C = C$ (\oplus es idempotente para C)

– R es no vacío

A17 (Distributividad): $\langle \bigoplus i : R.i : C \otimes T.i \rangle = C \otimes \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle$

– i no aparece en C

– \otimes distributivo a izquierda con \oplus

– R es no vacío o el neutro de \oplus es absorbente para \otimes

Análogamente, $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \otimes C \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \otimes C$

– i no aparece en C

– \otimes distributivo a derecha con \oplus

– R es no vacío o el neutro de \oplus es absorbente para \otimes

A18 (Anidado): $\langle \bigoplus i, j : R.i \wedge S.i.j : T.i.j \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : \langle \bigoplus j : S.i.j : T.i.j \rangle \rangle$

A19 (Intercambio): $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i :: R.i \Rightarrow T.i \rangle$
 $\langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i :: R.i \wedge T.i \rangle$

A20 (De Morgan): $\neg \langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : \neg T.i \rangle$
 $\neg \langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i : R.i : \neg T.i \rangle$

A21 (Definición de conteo): $\langle N i : R.i : T.i \rangle = \langle \sum i : R.i \wedge T.i : 1 \rangle$

Teoremas

T8 (Propiedad de máximo y mínimo): Si el rango R es no vacío entonces

$$z = \langle \text{Max } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : F.i \leq z \rangle$$

$$z = \langle \text{Min } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : z \leq F.i \rangle$$

T9 (Cambio de variable): $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle = \langle \bigoplus j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$

– f tiene inversa en R

– j no aparece en R y T .

Algunos cuantificadores concretos

Cuantificador (\bigoplus)	Operador (\bigoplus)	Neutro (e)	Absorbente	Idempotente?
\forall	\wedge	<i>True</i>	<i>False</i>	sí
\exists	\vee	<i>False</i>	<i>True</i>	sí
\sum	$+$	0	(no tiene)	no
\prod	\times	1	0	no
Max	<i>max</i>	$-\infty$	$+\infty$	sí
Min	<i>min</i>	$+\infty$	$-\infty$	sí