Consejos para la Derivación de Programas Funcionales

Franco M. Luque

Algoritmos y Estructuras de Datos I
2^{do} cuatrimestre 2017

1. Derivaciones por Inducción en General

En el paso inductivo, **siempre** trabajar primero la parte que nos debe llevar a la hipótesis inductiva, para **darnos cuenta lo antes posible si hace falta generalizar**, ya que al generalizar ya no sirve toda la derivación hecha hasta el momento.

2. Rangos con una sola Variable Natural i

En el paso inductivo, los rangos de la forma

$$0 \leq i < n + 1$$

se pueden partir de dos maneras. Por el principio:

$$i = 0 \;\vee\; 1 \leq i < n + 1 \tag{1}$$

o por el final:

$$0 \leq i < n \;\vee\; i = n \tag{2}$$

La forma (1) sirve cuando la variable i se usa con listas como índice $(xs\,!\,i)$ o como parámetro de tirar $(xs{\downarrow}i)$ o tomar $(xs{\uparrow}i)$, ya que luego se podrán aplicar las definiciones de las funciones de listas para $i = 0$ y para la otra parte luego del cambio de variable $i \to i + 1$.

> Ejemplos: Práctico 2 ejercicios 2 *a, b, e* y *f*.

La forma (2) sirve cuando la variable i se usa como un número en un cálculo aritmético, ya que en la parte $0 \leq i < n$ se puede llegar a la hipótesis inductiva rápidamente sin necesidad de hacer cambio de variable.

> Ejemplos: Práctico 2 ejercicios $2d$, $4b$, $8a$.

A veces, ambas formas pueden servir cuando la variable i se usa como un número en un cálculo aritmético. Cada forma puede dar un programa resultado diferente, ambos correctos.

Ejemplos: Práctico 2, ejercicio $4a$.

3. Rangos con Segmentos de Lista

En el paso inductivo, los rangos de la forma

$$x \triangleright xs = as +\!\!+\, bs +\!\!+\, cs$$

se deben partir con

$$as = [\,] \vee as \neq [\,].$$

En la parte con $as \neq [\,]$ hay que hacer cambio de variable $(a, as) \to a \triangleright as$, luego usar que, por propiedad de listas,

$$x \triangleright xs = (a \triangleright as) +\!\!+\, bs +\!\!+\, cs \quad \equiv \quad x = a \ \wedge \ xs = as +\!\!+\, bs +\!\!+\, cs$$

y después usar eliminación de variable (T10) con $x = a$ para eliminar a y llegar a la hipótesis inductiva.

La parte con $as = [\,]$ debe quedar **el mismo problema pero para segmentos iniciales**, por lo que conviene **modularizar** este nuevo problema como una nueva función que debe ser derivada aparte.

Ejemplos: Práctico 2, ejercicios 12 *a, b* y *c*.

4. Rangos con Segmentos Iniciales o Finales

En el paso inductivo, los rangos de la forma

$$x \triangleright xs = as +\!\!+\, bs$$

se deben partir con

$$as = [\,] \vee as \neq [\,].$$

En la parte con $as \neq [\,]$ hay que hacer cambio de variable $(a, as) \to a \triangleright as$, luego usar que, por propiedad de listas,

$$x \triangleright xs = (a \triangleright as) +\!\!+\, bs \quad \equiv \quad x = a \ \wedge \ xs = as +\!\!+\, bs$$

y después usar eliminación de variable (T10) con $x = a$ para eliminar a y reemplazarla por x. Luego se puede llegar a la **hipótesis inductiva** o puede llegar a hacer falta **generalizar**.

En la parte con $as = [\,]$ se puede eliminar as y después hacer rango unitario con $x \triangleright xs = bs$.

Ejemplos: Práctico 2, modularizaciones en los ejercicios 12 *a*, *b* y *c*.

5. Rangos con Pares de Elementos de Lista

Ejemplo: Ejercicio 13a:

$$f.xs = \langle \mathrm{N}\ i, j\ :\ 0 \leq i < j < \#xs\ :\ xs\,!\,i = xs\,!\,j \rangle$$

En el paso inductivo, los rangos de la forma

$$0 \leq i < j < \#xs + 1$$

se deben reescribir de la forma

$$(i = 0 \wedge 0 < j < \#xs + 1) \vee (1 \leq i < j < \#xs + 1)$$

para después partir rango.

En la parte con $i = 0$ se hace eliminación de variable, quedando un problema sólo con j que se debe **modularizar**.

En la otra parte, se hacen dos cambios de variable $i \rightarrow i{+}1$ y $j \rightarrow j{+}1$. Luego se puede aplicar definición de indexación (!) y se puede llegar a la **hipótesis inductiva** o puede llegar a hacer falta **generalizar**.

Ejemplos: Práctico 2, ejercicios 13 *a* y *d*.