Algoritmos y Estructuras de Datos I

Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos del Cálculo Proposicional y Expresiones Cuantificadas

Cálculo Proposicional

Axiomas

A1 Asociatividad de la Equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 Conmutatividad de la Equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 Neutro de la Equivalencia:

$$P \equiv True \equiv P$$

A4 Definición de la Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 Definición de $False$:

$$False \equiv \neg True$$

A6 Definición de la Discrepancia:

$$P \not\equiv Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

A7 Asociatividad de la Disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 Conmutatividad de la Disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 Idempotencia de la Disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

A10 Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

A11 Leibniz:

$$e = f \Rightarrow E(z := e) = E(z := f)$$

Teoremas

T1 Doble Negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

T2 Equivalencia y Negación:

$$P \equiv \neg P \equiv False$$

T3 Elemento absorbente de la Disyunción:

$$P \vee True \equiv True$$

T4 Elemento neutro de la Disyunción:

$$P \vee False \equiv P$$

T5 Conmutatividad de la Conjunción:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

T6 Asociatividad de la Conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

T7 Leibniz 2 (reemplazo de iguales por iguales):

$$e = f \wedge E(z := e) \equiv e = f \wedge E(z := f)$$

Precedencia de Operadores

4. $\neg$
3. $\vee$, $\wedge$
2. $\Rightarrow$, $\Leftarrow$
1. $\equiv$, $\not\equiv$

Cuantificadores

Axiomas

A12 (Rango vacío): $\langle \bigoplus i \ : False : \ T \rangle = e$

– e es el elemento neutro de $\oplus$: $a \oplus e = a$

A13 (Rango unitario): $\langle \bigoplus i \ : i = C : \ T.i \rangle = T.C$

– i no aparece en C

A14 (Partición de rango): $\langle \bigoplus i \ : R.i \vee S.i : \ T.i \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i \ : S.i : \ T.i \rangle$

– $\oplus$ es idempotente ($a \oplus a = a$) ó R y S son disjuntos (no hay i tal que $R.i \wedge S.i$)

A15 (Regla del término): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \oplus U.i \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i \ : R.i : \ U.i \rangle$

A16 (Término constante): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ C \rangle = C$

– i no aparece en C
– $C \oplus C = C$ ($\oplus$ es idempotente para C)
– R es no vacío

A17 (Distributividad): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \otimes C \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle \otimes C$

– i no aparece en C
– $\otimes$ distributivo con $\oplus$: $(a \otimes c) \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes c$
– R es no vacío, o el neutro de $\oplus$ es absorbente para $\otimes$

A18 (Anidado): $\langle \bigoplus i, j \ : R.i \wedge S.i.j : \ T.i.j \rangle = \langle \bigoplus i \ : R.i : \ \langle \bigoplus j \ : S.i.j : \ T.i.j \rangle \rangle$

A19 (Intercambio): $\langle \forall i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \forall i \ :: \ R.i \Rightarrow T.i \rangle$
$\langle \exists i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \exists i \ :: \ R.i \wedge T.i \rangle$

A20 (De Morgan): $\neg \langle \forall i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ \neg T.i \rangle$
$\neg \langle \exists i \ : R.i : \ T.i \rangle \equiv \langle \forall i \ : R.i : \ \neg T.i \rangle$

A21 (Definición de conteo): $\langle N i \ : R.i : \ T.i \rangle = \langle \sum i \ : R.i \wedge T.i : \ 1 \rangle$

Teoremas

T8 (Propiedad de máximo y mínimo): Si el rango R es no vacío entonces

$$z = \langle \text{Max } i \ : R.i : \ F.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i \ : R.i : \ F.i \leq z \rangle$$
$$z = \langle \text{Min } i \ : R.i : \ F.i \rangle \equiv \langle \exists i \ : R.i : \ z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i \ : R.i : \ z \leq F.i \rangle$$

T9 (Cambio de variable): $\langle \bigoplus i \ : R.i : \ T.i \rangle = \langle \bigoplus j \ : R.(f.j) : \ T.(f.j) \rangle$

– f tiene inversa en R
– j no aparece en R y T.

T10 (Eliminación de variable): $\langle \bigoplus i, j \ : i = C \wedge R.i.j : \ T.i.j \rangle = \langle \bigoplus j \ : R.C.j : \ T.C.j \rangle$

– i, j no aparecen en C.

Algunos cuantificadores concretos

Cuantificador ($\bigoplus$)	Operador ($\oplus$)	Neutro (e)	Absorbente	Idempotente?	Distributiva ($\otimes$)
$\forall$	$\wedge$	$True$	$False$	sí	$\vee$
$\exists$	$\vee$	$False$	$True$	sí	$\wedge$
$\sum$	$+$	0	(no tiene)	no	$*$
$\prod$	$*$	1	0	no	
Max	max	$-\infty$	$+\infty$	sí	$+$
Min	min	$+\infty$	$-\infty$	sí	$+$