

Práctico 1: Expresiones Cuantificadas y Formalismo Básico

Algoritmos y Estructuras de Datos I 1^{er} cuatrimestre 2017

Un objetivo de esta guía es retomar la práctica del cálculo proposicional y de predicados, e introducirnos al cálculo con cuantificadores generales. **Notación para la realización de demostraciones.** Lograr familiaridad con los axiomas y teoremas del cálculo, y habilidad en las demostraciones es necesario para poder abordar la tarea de derivación y demostración de programas que encararemos de aquí en adelante.

1. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural. Marcá todas las variables, indicando si son libres y ligadas.

- a) $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : xs!i > 0 \rangle$
- b) $\langle \exists i : 0 \leq i < \#xs : xs!i = x \rangle$
- c) $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : \langle \exists j : 0 \leq j < \#ys : xs!i = ys!j \rangle \rangle$
- d) $\langle \forall i : 0 \leq i < \#xs - 1 : xs!i = xs!(i + 1) \rangle$

Observación: Las desigualdades de la forma $A \leq B < C$ son abuso de notación para $(A \leq B) \wedge (B < C)$.

2. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evaluá la fórmula en las siguientes listas:

- a) $xs = [-3, 8, 4]$
- b) $xs = [5, 8, 2]$

Para el ítem b), considerar $x = 5$. Para el ítem c), considerar $ys = [2, -3, 5, 8]$.

Ejemplo: Fórmula 4.a) aplicada a $xs = [-3, 8, 4]$:

$$\begin{aligned} & \langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : xs!i > 0 \rangle \\ \equiv & \{ \text{aplico el término a cada elemento del rango } i \in \{0, 1, 2\} \} \\ & (xs!0 > 0) \wedge (xs!1 > 0) \wedge (xs!2 > 0) \\ \equiv & \{ \text{evalúo las indexaciones con } xs = [-3, 8, 4] \} \\ & (-3 > 0) \wedge (8 > 0) \wedge (4 > 0) \\ \equiv & \{ \text{evalúo las desigualdades} \} \\ & False \wedge True \wedge True \\ \equiv & \{ \text{resuelvo las conjunciones} \} \\ & False \end{aligned}$$

3. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural. Marcá todas las variables, indicando si son libres y ligadas.

- a) $\langle \prod i : 1 \leq i \leq n : i \rangle$
- b) $\langle \frac{\sum i : 0 \leq i < \#xs : xs!i}{\#xs} \rangle$
- c) $\langle \text{Max } i : 0 \leq i < \#xs : xs!i \rangle < \langle \text{Min } i : 0 \leq i < \#ys : ys!i \rangle$
- d) $\langle \exists i, j : (2 \leq i < n) \wedge (2 \leq j < n) : i * j = n \rangle$

4. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evaluá respectivamente con los siguientes valores:

- a) $n = 5$.
- b) $xs = [6, 9, 3, 9, 8]$.
- c) $xs = [-3, 9, 8], ys = [6, 7, 8]$.
- d) $n = 5$.

5. Escribí fórmulas para las siguientes expresiones en lenguaje natural. Responder: ¿Qué tipo tiene cada expresión?

- a) n es el elemento más grande de xs .
- b) El producto de los elementos pares de xs .
- c) La suma de los elementos en posición par de xs .
- d) n es potencia de 2.

6. **Calculá los rangos** de las siguientes cuantificaciones como conjuntos de posibles valores. Tomar $n = 10$, $xs = [-3, 9, 8, 9]$, $ys = [6, 9, 3]$. Usá tuplas cuando haya más de una variable cuantificada.

- a) $\langle \prod i : 1 \leq i \leq n \wedge i \text{ mód } 3 = 1 : i \rangle$
- b) $\langle \sum i, j : 0 \leq i < \#xs \wedge 0 \leq j < \#ys : xs!i * ys!j \rangle$
- c) $\langle \forall i, j : 0 \leq i < j < \#xs : xs!i \neq xs!j \rangle$
- d) $\langle \text{Max } as, bs : xs = as \uparrow\uparrow bs : \text{sum.as} \rangle$

7. Simplificá y aplicá, según corresponda, **rango vacío**, **rango unitario** o **término constante**.

- a) $\langle \exists i : i = 3 \wedge i \text{ mód } 2 = 0 : 2 * i = 6 \rangle$
- b) $\langle \sum i : 5 \leq i \wedge i \leq 5 : -2 * i \rangle$
- c) $\langle \prod i : 0 < i < 1 : 34 \rangle$
- d) $\langle \text{Min } i : i \leq 0 \vee i > 10 : n * (i + 2) - n * i \rangle$
- e) $\langle \text{Max } a, as : a \triangleright as = [] : \#as \rangle$

8. Aplicá **partición de rango** si es que se puede, y si no se puede, explicá porqué.

- a) $\langle \sum i : i = 0 \vee 4 > i \geq 1 : n * (i + 1) \rangle$
- b) $\langle \forall i : 3 \leq |i| \leq 4 \vee 0 < i < 4 : \neg f.i \rangle$
- c) $\langle \sum i : |i| \leq 1 \vee 0 \leq 2 * i < 7 : i * n \rangle$
- d) $\langle \prod i : 0 \leq i < \#xs \wedge (i \text{ mód } 3 = 0 \vee i \text{ mód } 3 = 1) : 2 * xs!i + 1 \rangle$ (distribuir primero!)

9. Calculá los resultados para todos los ítems del ejercicio anterior. Usá $n = 3$, $f.x = |x| < 4$, $xs = [-1, 1, 0, 3]$.

10. Descubrí el error en la siguiente prueba:

$$\begin{aligned}
 & \langle \sum i : 0 \leq i < \#xs : xs!i \rangle \\
 = & \{ \text{lógica} \} \\
 & \langle \sum i : i = 0 \vee 1 \leq i < \#xs : xs!i \rangle \\
 = & \{ \text{partición de rango disjuncto} \} \\
 & \langle \sum i : i = 0 : xs!i \rangle + \langle \sum i : 1 \leq i < \#xs : xs!i \rangle \\
 = & \{ \text{rango unitario} \} \\
 & xs!0 + \langle \sum i : 1 \leq i < n : xs!i \rangle
 \end{aligned}$$

11. Aplicá **distributividad**, si es que se puede.

- a) $\langle \sum i : i = 0 \vee 4 > i \geq 1 : n * (i + 1) \rangle$
- b) $\langle \prod i : 3 \leq |i| \leq 4 \vee 0 < i < 4 : n + i \rangle$
- c) $\langle \forall i : i = 0 \vee 4 > i \geq 1 : \neg(f.i \wedge f.n) \rangle$ (usar Morgan primero!)
- d) $\langle \text{Max } i : 0 \leq i < \#xs : x + xs!i \rangle$

12. Calculá los resultados para todos los ítems del ejercicio anterior. Usá $n = 3$, $f.x = (x = 0)$, $x \triangleright xs = [-1, 1, 0, 3]$.

13. Aplicá el **cambio de variable** indicado, si es que se puede. Explicá porqué puede o no puede aplicarse.

- a) $\langle \sum i : |i| < 5 : i \text{ div } 2 \rangle$ con $i \rightarrow 2 * i$
- b) $\langle \sum i : i \text{ mód } 2 = 0 \wedge |i| < 5 : i \text{ div } 2 \rangle$ con $i \rightarrow 2 * i$

- c) $\langle \prod i : 0 < i \leq \#(x \triangleright xs) : (x \triangleright xs)!i \rangle$ con $i \rightarrow i + 1$
d) $\langle \text{Max } as : as \neq [] : \#as \rangle$ con $as \rightarrow a \triangleright as$

14. Simplificá el rango y aplicá alguna de las **reglas para la cuantificación de conteo**:

- a) $\langle Na, as : a \triangleright as = xs \wedge xs = [] : \#as = 1 \rangle$
b) $\langle Ni : i - n = 1 : i \text{ mód } 2 = 0 \rangle$
c) $\langle Ni, j : i = 0 \vee 1 \leq i < \#xs + 1 : ((x \triangleright xs)!i) \text{ mód } 2 = 0 \rangle$

15. Para las siguientes funciones:

$$f.0 \doteq 1$$

$$f.(n + 1) \doteq f.n + 2 * n + 1$$

$$g.[] \doteq 0$$

$$g.(x \triangleright xs) \doteq x * (g.xs + 1)$$

$$h.n.[] \doteq n \geq 0$$

$$h.n.(x \triangleright xs) \doteq n \geq 0 \wedge h.(n + x).xs$$

- a) Identificá los tipos de las funciones.
b) Evaluá las expresiones $f.4$, $g.[3, -1, 2]$ y $h.0.[3, -2, -2]$, aplicando una reducción por paso.
c) Reescribí las definiciones usando análisis por casos en lugar de patrones.

16. Demostrá las siguientes reglas de separación de término:

- a) $\langle \oplus i : 0 \leq i < n + 1 : T.i \rangle = \langle \oplus i : 0 \leq i < n : T.i \rangle \oplus T.n$
b) $\langle \oplus i : 0 \leq i < n + 1 : T.i \rangle = T.0 \oplus \langle \oplus i : 0 \leq i < n : T.(i + 1) \rangle$

17. Demostrá el Teorema de Eliminación de Variable:

$$\langle \oplus i, j : i = C \wedge R.i.j : T.i.j \rangle = \langle \oplus j : R.C.j : T.C.j \rangle$$

18. Demostrá la siguiente regla:

$$\langle \oplus i : i = C \wedge R.i : T.i \rangle = \begin{pmatrix} R.C & \rightarrow T.C \\ \square & \neg R.C \rightarrow e \end{pmatrix}$$

a donde e es el elemento neutro para \oplus .

19. Demostrá la siguiente regla de separación de término 2D:

- a) $\langle \oplus i, j : 0 \leq i < j < n + 1 : T.i.j \rangle =$
 $\langle \oplus i, j : 0 \leq i < j < n : T.i.j \rangle \oplus \langle \oplus i : 0 \leq i < n : T.i.n \rangle$
b) $\langle \oplus i, j : 0 \leq i < j < n + 1 : T.i.j \rangle =$
 $\langle \oplus j : 0 \leq j < n : T.0.(j + 1) \rangle \oplus \langle \oplus i, j : 0 \leq i \leq j < n : T.(i + 1).(j + 1) \rangle$

Ayuda: Escribir las desigualdades en el rango $0 \leq i \leq j < n + 1$ como $0 \leq i \wedge i \leq j \wedge j < n + 1$, aplicar anidado, partición de rango y rango unitario en una de las variables. Puede ser útil esquematizar el rango en ejes cartesianos para visualizar el resultado.