

# Algoritmos y Estructuras de Datos I

## Digesto de Axiomas y Teoremas Básicos del Cálculo Proposicional y Expresiones Cuantificadas

### Cálculo Proposicional

#### Axiomas

**A1** Asociatividad de la Equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

**A2** Conmutatividad de la Equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

**A3** Neutro de la Equivalencia:

$$P \equiv True \equiv P$$

**A4** Definición de la Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

**A5** Definición de *False*:

$$False \equiv \neg True$$

**A6** Definición de la Discrepancia:

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

**A7** Asociatividad de la Disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

**A8** Conmutatividad de la Disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

**A9** Idempotencia de la Disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

**A10** Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

**A11** Leibniz:

$$e = f \Rightarrow E(z := e) = E(z := f)$$

#### Teoremas

**T1** Doble Negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

**T2** Equivalencia y Negación:

$$P \equiv \neg P \equiv False$$

**T3** Elemento absorbente de la Disyunción:

$$P \vee True \equiv True$$

**T4** Elemento neutro de la Disyunción:

$$P \vee False \equiv P$$

**T5** Conmutatividad de la Conjunción:

$$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

**T6** Asociatividad de la Conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

**T7** Leibniz 2 (reemplazo de iguales por iguales):

$$e = f \wedge E(z := e) \equiv e = f \wedge E(z := f)$$

#### Precedencia de Operadores

4.  $\neg$

3.  $\vee$ ,  $\wedge$

2.  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$

1.  $\equiv$ ,  $\neq$

# Cuantificadores

## Axiomas

**A12 (Rango vacío):**  $\langle \bigoplus i : False : T \rangle = e$

–  $e$  es el elemento neutro de  $\oplus$ :  $a \oplus e = a$

**A13 (Rango unitario):**  $\langle \bigoplus i : i = C : T.i \rangle = T.C$

–  $i$  no aparece en  $C$

**A14 (Partición de rango):**  $\langle \bigoplus i : R.i \vee S.i : T.i \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : S.i : T.i \rangle$

–  $\oplus$  es idempotente ( $a \oplus a = a$ ) ó  $R$  y  $S$  son disjuntos (no hay  $i$  tal que  $R.i \wedge S.i$ )

**A15 (Regla del término):**  $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \oplus U.i \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \oplus \langle \bigoplus i : R.i : U.i \rangle$

**A16 (Término constante):**  $\langle \bigoplus i : R.i : C \rangle = C$

–  $i$  no aparece en  $C$

–  $C \oplus C = C$  ( $\oplus$  es idempotente para  $C$ )

–  $R$  es no vacío

**A17 (Distributividad):**  $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \otimes C \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle \otimes C$

–  $i$  no aparece en  $C$

–  $\otimes$  distributivo con  $\oplus$ :  $(a \otimes c) \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes c$

–  $R$  es no vacío, o el neutro de  $\oplus$  es absorbente para  $\otimes$

**A18 (Anidado):**  $\langle \bigoplus i, j : R.i \wedge S.i.j : T.i.j \rangle = \langle \bigoplus i : R.i : \langle \bigoplus j : S.i.j : T.i.j \rangle \rangle$

**A19 (Intercambio):**  $\langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i :: R.i \Rightarrow T.i \rangle$

$\langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i :: R.i \wedge T.i \rangle$

**A20 (De Morgan):**  $\neg \langle \forall i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : \neg T.i \rangle$

$\neg \langle \exists i : R.i : T.i \rangle \equiv \langle \forall i : R.i : \neg T.i \rangle$

**A21 (Definición de conteo):**  $\langle N i : R.i : T.i \rangle = \langle \sum i : R.i \wedge T.i : 1 \rangle$

## Teoremas

**T8 (Propiedad de máximo y mínimo):** Si el rango  $R$  es no vacío entonces

$z = \langle \text{Max } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : F.i \leq z \rangle$

$z = \langle \text{Min } i : R.i : F.i \rangle \equiv \langle \exists i : R.i : z = F.i \rangle \wedge \langle \forall i : R.i : z \leq F.i \rangle$

**T9 (Cambio de variable):**  $\langle \bigoplus i : R.i : T.i \rangle = \langle \bigoplus j : R.(f.j) : T.(f.j) \rangle$

–  $f$  tiene inversa en  $R$

–  $j$  no aparece en  $R$  y  $T$ .

## Algunos cuantificadores concretos

Cuantificador ( $\bigoplus$ )	Operador ( $\oplus$ )	Neutro ( $e$ )	Absorbente	Idempotente?	Distributiva ( $\otimes$ )
$\forall$	$\wedge$	<i>True</i>	<i>False</i>	sí	$\vee$
$\exists$	$\vee$	<i>False</i>	<i>True</i>	sí	$\wedge$
$\sum$	$+$	0	(no tiene)	no	$\times$
$\prod$	$\times$	1	0	no	
Max	<i>max</i>	$-\infty$	$+\infty$	sí	$+$
Min	<i>min</i>	$+\infty$	$-\infty$	sí	$+$