Práctico 1: Expresiones Cuantificadas y Formalismo Básico

Algoritmos y Estructuras de Datos I
2^{do} cuatrimestre 2018

Un objetivo de esta guía es retomar la práctica del cálculo proposicional y de predicados, e introducirnos al cálculo con cuantificadores generales. ***Notación para la realización de demostraciones.*** *Lograr familiaridad con los axiomas y teoremas del cálculo, y habilidad en las demostraciones es necesario para poder abordar la tarea de derivación y demostración de programas que encararemos de aquí en adelante.*

1. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural. Marcá todas las variables, indicando si son libres y ligadas.

   a) $\langle \forall i\ : 0 \leq i < \#xs :\ xs\,!\,i > 0\,\rangle$
   b) $\langle \exists i\ : 0 \leq i < \#xs :\ xs\,!\,i = x\,\rangle$
   c) $\langle \forall i\ : 0 \leq i < \#xs :\ \langle \exists j\ : 0 \leq j < \#ys :\ xs\,!\,i = ys\,!\,j\,\rangle\,\rangle$
   d) $\langle \forall i\ : 0 \leq i < \#xs - 1 :\ xs\,!\,i = xs\,!\,(i+1)\,\rangle$

   Observación: Las desigualdades de la forma $A \leq B < C$ son abuso de notación para $(A \leq B) \wedge (B < C)$.

2. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evaluá la fórmula en las siguientes listas:

   a) $xs = [-3, 8, 4]$
   b) $xs = [5, 8, 2]$

   Para el ítem b), considerar $x = 5$. Para el ítem *c)*, considerar $ys = [2, -3, 5, 8]$.
   Ejemplo: Fórmula $4.a$) aplicada a $xs = [-3, 8, 4]$:

   $$\begin{array}{ll} & \langle \forall i\ : 0 \leq i < \#xs :\ xs\,!\,i > 0\,\rangle \\ \equiv & \{ \text{ aplico el término a cada elemento del rango } i \in \{0,1,2\} \text{ } \} \\ & (xs\,!\,0 > 0) \wedge (xs\,!\,1 > 0) \wedge (xs\,!\,2 > 0) \\ \equiv & \{ \text{ evalúo las indexaciones con } xs = [-3,8,4] \text{ } \} \\ & (-3 > 0) \wedge (8 > 0) \wedge (4 > 0) \\ \equiv & \{ \text{ evalúo las desigualdades } \} \\ & False \wedge True \wedge True \\ \equiv & \{ \text{ resuelvo las conjunciones } \} \\ & False \end{array}$$

3. Para cada una de las siguientes fórmulas, describí su significado utilizando el lenguaje natural. Marcá todas las variables, indicando si son libres y ligadas.

   a) $\langle \prod i\ : 1 \leq i \leq n :\ i\,\rangle$
   b) $\dfrac{\langle \sum i : 0 \leq i < \#xs : xs\,!\,i\,\rangle}{\#xs}$
   c) $\langle \text{Max}\ i\ : 0 \leq i < \#xs :\ xs\,!\,i\,\rangle < \langle \text{Min}\ i\ : 0 \leq i < \#ys :\ ys\,!\,i\,\rangle$
   d) $\langle \exists i, j\ : (2 \leq i < n) \wedge (2 \leq j < n) :\ i * j = n\,\rangle$

4. Para cada uno de los ítems del ejercicio anterior, evaluá respectivamente con los siguientes valores:

   a) $n = 5$.
   b) $xs = [6, 9, 3, 9, 8]$.
   c) $xs = [-3, 9, 8], ys = [6, 7, 8]$.
   d) $n = 5$.

5. Escribí fórmulas para las siguientes expresiones en lenguaje natural. Responder: ¿Qué tipo tiene cada expresión?

   a) n es el elemento más grande de xs.
   b) El producto de los elementos pares de xs.
   c) La suma de los elementos en posición par de xs.
   d) n es potencia de 2.

6. **Calculá los rangos** de las siguientes cuantificaciones como conjuntos de posibles valores. Tomar $n = 10$, $xs = [-3, 9, 8, 9]$, $ys = [6, 9, 3]$. Usá tuplas cuando haya más de una variable cuantificada.

   a) $\langle \prod i \; : 1 \leq i \leq n \; \wedge \; i \mod 3 = 1 : \; i \, \rangle$
   b) $\langle \sum i, j \; : 0 \leq i < \#xs \; \wedge \; 0 \leq j < \#ys : \; xs\,!\,i * ys\,!\,j \, \rangle$
   c) $\langle \forall\, i, j \; : 0 \leq i < j < \#xs : \; xs\,!\,i \neq xs\,!\,j \, \rangle$
   d) $\langle \text{Max } as, bs \; : xs = as +\!\!+ \, bs : \; sum.as \, \rangle$

7. Simplificá y aplicá, según corresponda, **rango vacío, rango unitario o término constante**.

   a) $\langle \, \exists\, i \; : i = 3 \wedge i \mod 2 = 0 : \; 2 * i = 6 \, \rangle$
   b) $\langle \sum i \; : 5 \leq i \wedge i \leq 5 : \; -2 * i \, \rangle$
   c) $\langle \prod i \; : 0 < i < 1 : \; 34 \, \rangle$
   d) $\langle \text{Min } i \; : i \leq 0 \vee i > 10 : \; n * (i + 2) - n * i \, \rangle$
   e) $\langle \text{Max } a, as \; : a \triangleright as = [\,] : \; \#as \, \rangle$

8. Aplicá **partición de rango** si es que se puede, y si no se puede, explicá porqué.

   a) $\langle \sum i \; : i = 0 \; \vee \; 4 > i \geq 1 : \; n * (i + 1) \, \rangle$
   b) $\langle \forall\, i \; : 3 \leq |i| \leq 4 \; \vee \; 0 < i < 4 : \; \neg f.i \, \rangle$
   c) $\langle \sum i \; : |i| \leq 1 \; \vee \; 0 \leq 2 * i < 7 : \; i * n \, \rangle$
   d) $\langle \prod i \; : 0 \leq i < \#xs \; \wedge \; (i \mod 3 = 0 \; \vee \; i \mod 3 = 1) : \; 2 * xs\,!\,i + 1 \, \rangle$ (distribuir primero!)

9. Calculá los resultados para todos los ítems del ejercicio anterior. Usá $n = 3$, $f.x = |x| < 4$, $xs = [-1, 1, 0, 3]$.

10. Descubrí el error en la siguiente prueba:

$$
\begin{aligned}
& \langle \textstyle\sum i \; : 0 \leq i < \#xs : \; xs \,!\, i \, \rangle \\
= & \; \{ \text{ lógica } \} \\
& \langle \textstyle\sum i \; : i = 0 \; \vee \; 1 \leq i < \#xs : \; xs \,!\, i \, \rangle \\
= & \; \{ \text{ partición de rango disjunto } \} \\
& \langle \textstyle\sum i \; : i = 0 : \; xs \,!\, i \, \rangle + \langle \textstyle\sum i \; : 1 \leq i < \#xs : \; xs \,!\, i \, \rangle \\
= & \; \{ \text{ rango unitario } \} \\
& xs \,!\, 0 + \langle \textstyle\sum i \; : 1 \leq i < \#xs : \; xs \,!\, i \, \rangle
\end{aligned}
$$

11. Aplicá **distributividad**, si es que se puede.

   a) $\langle \sum i \; : i = 0 \; \vee \; 4 > i \geq 1 : \; n * (i + 1) \, \rangle$
   b) $\langle \prod i \; : 3 \leq |i| \leq 4 \; \vee \; 0 < i < 4 : \; n + i \, \rangle$
   c) $\langle \forall\, i \; : i = 0 \; \vee \; 4 > i \geq 1 : \; \neg(f.i \; \wedge \; f.n) \, \rangle$ (usar Morgan primero!)
   d) $\langle \text{Max } i \; : 0 \leq i < \#xs : \; x + xs\,!\,i \, \rangle$

12. Calculá los resultados para todos los ítems del ejercicio anterior. Usá $n = 3$, $f.x = (x = 0)$, $x \triangleright xs = [-1, 1, 0, 3]$.

13. Aplicá el **cambio de variable** indicado, si es que se puede. Explicá porqué puede o no puede aplicarse.

   a) $\langle \sum i \; : |i| < 5 : \; i \text{ div } 2 \, \rangle$ con $i \to 2 * i$
   b) $\langle \sum i \; : i \mod 2 = 0 \wedge |i| < 5 : \; i \text{ div } 2 \, \rangle$ con $i \to 2 * i$

c) $\langle \prod i \ : 0 < i \leq \#(x \triangleright xs) : \ (x \triangleright xs) \,!\, i \,\rangle$ con $i \to i+1$

d) $\langle \text{Max } \ as \ : as \neq [\,] : \ \#as \,\rangle$ con $(a, as) \to a \triangleright as$ (la función es $f.(a, as) = a \triangleright as$)

14. Simplificá el rango y aplicá alguna de las **reglas para la cuantificación de conteo**:

a) $\langle N\, a, as \ : a \triangleright as = xs \wedge xs = [\,] : \ \#as = 1 \,\rangle$

b) $\langle N\, i \ : i - n = 1 : \ i \mod 2 = 0 \,\rangle$

c) $\langle N\, i \ : i = 0 \vee 1 \leq i < \#xs + 1 : \ ((x \triangleright xs) \,!\, i) \mod 2 = 0 \,\rangle$

15. Para las siguientes funciones:

$$f.0 \doteq 1$$
$$f.(n+1) \doteq f.n + 2 * n + 1$$

$$g.[\,] \doteq 0$$
$$g.(x \triangleright xs) \doteq x * (g.xs + 1)$$

$$h.n.[\,] \doteq n \geq 0$$
$$h.n.(x \triangleright xs) \doteq n \geq 0 \ \wedge \ h.(n + x).xs$$

a) Identificá los tipos de las funciones.

b) Evaluá las expresiones $f.4$, $g.[3, -1, 2]$ y $h.0.[3, -2, -2]$, aplicando una reducción por paso.

c) Reescribí las definiciones usando análisis por casos en lugar de patrones.

16. Evaluá las siguientes expresiones aplicando una reducción por paso:

a) $[3, -1, 4] \,!\, 2$

b) $[3, -1, 4] \downarrow 2$

c) $[3, -1, 4] \uparrow 2$

d) $[3, -1, 4] \ +\!\!+ \ [3, -2, -2]$

17. Demostrá las siguientes reglas de separación de término:

a) $\langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n+1 : \ T.i \,\rangle = \langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n : \ T.i \,\rangle \oplus T.n$

b) $\langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n+1 : \ T.i \,\rangle = T.0 \oplus \langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n : \ T.(i+1) \,\rangle$

18. Demostrá el Teorema de Eliminación de Variable:

$$\langle \bigoplus i, j \ : i = C \wedge R.i.j : \ T.i.j \,\rangle = \langle \bigoplus j \ : R.C.j : \ T.C.j \,\rangle$$

19. Demostrá la siguiente regla:

$$\langle \bigoplus i \ : i = C \wedge R.i : \ T.i \,\rangle = \begin{array}{lll} (& R.C & \to T.C \\ \Box & \neg R.C & \to e \\ ) & & \end{array}$$

a donde e es el elemento neutro para $\oplus$.

20. Demostrá la siguiente regla de separación de término 2D:

a) $\langle \bigoplus i, j \ : 0 \leq i < j < n+1 : \ T.i.j \,\rangle =$
$\langle \bigoplus i, j \ : 0 \leq i < j < n : \ T.i.j \,\rangle \oplus \langle \bigoplus i \ : 0 \leq i < n : \ T.i.n \,\rangle$

b) $\langle \bigoplus i, j \ : 0 \leq i < j < n+1 : \ T.i.j \,\rangle =$
$\langle \bigoplus j \ : 0 \leq j < n : \ T.0.(j+1) \,\rangle \oplus \langle \bigoplus i, j \ : 0 \leq i < j < n : \ T.(i+1).(j+1) \,\rangle$

Ayuda: Escribir las desigualdades en el rango $0 \leq i \leq j < n+1$ como $0 \leq i \wedge i \leq j \wedge j < n+1$, aplicar anidado, partición de rango y rango unitario en una de las variables. Puede ser útil esquematizar el rango en ejes cartesianos para visualizar el resultado.