

# Algoritmos y Estructuras de Datos I

## Digesto para la Programación Imperativa

Relación entre Terna de Hoare y Weakest Precondition

$$\{P\} S \{Q\} \equiv P \Rightarrow wp.S.Q$$

### 1. Skip

Verificación con Terna de Hoare:

$$\{P\} \text{skip} \{Q\} \equiv P \Rightarrow Q$$

Weakest Precondition:

$$wp.\text{skip}.Q \equiv Q$$

Verificación con Weakest Precondition:

$$\{P\} \text{skip} \{Q\} \equiv P \Rightarrow wp.\text{skip}.Q$$

Programa anotado:

```
⋮  
{Q}  
skip  
{Q}  
⋮
```

### 2. Asignación

Verificación con Terna de Hoare:

$$\{P\} x_1, \dots, x_n := E_1, \dots, E_n \{Q\} \equiv P \Rightarrow Q(x_1 \leftarrow E_1, \dots, x_n \leftarrow E_n)$$

**Nota:** “ $\leftarrow$ ” es el reemplazo sintáctico de una variable por una expresión.

Weakest Precondition:

$$wp.(x_1, \dots, x_n := E_1, \dots, E_n).Q \equiv Q(x_1 \leftarrow E_1, \dots, x_n \leftarrow E_n)$$

Verificación con Weakest Precondition:

$$\{P\} x_1, \dots, x_n := E_1, \dots, E_n \{Q\} \equiv P \Rightarrow wp.(x_1, \dots, x_n := E_1, \dots, E_n).Q$$

Programa anotado:

```
⋮  
{Q(x_1 \leftarrow E_1, \dots, x_n \leftarrow E_n)}  
x_1, \dots, x_n := E_1, \dots, E_n  
{Q}  
⋮
```

### 3. Composición o concatenación (;):

**Verificación con Terna de Hoare:**

$$\{P\} S;T \{Q\} \equiv \text{Existe } R \text{ tal que } \{P\} S \{R\} \wedge \{R\} T \{Q\}$$

**Weakest Precondition:**

$$wp.(S;T).Q \equiv wp.S.(wp.T.Q)$$

**Verificación con Weakest Precondition:**

$$\{P\} S;T \{Q\} \equiv P \Rightarrow wp.(S;T).Q$$

**Programa anotado:**

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \{wp.S.(wp.T.Q)\} \\ S; \\ \{wp.T.Q\} \\ T \\ \{Q\} \\ \vdots \end{array}$$

### 4. Condicional o alternativa (if):

**Verificación con Terna de Hoare:**

$$\begin{array}{ll} \{P\} \text{ if } B_1 \rightarrow S_1 \{Q\} & \equiv P \Rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n) \\ \square B_2 \rightarrow S_2 & \wedge \{B_1 \wedge P\} S_1 \{Q\} \\ \vdots & \wedge \{B_2 \wedge P\} S_2 \{Q\} \\ \square B_n \rightarrow S_n & \vdots \\ \text{fi} & \wedge \{B_n \wedge P\} S_n \{Q\} \end{array}$$

**Weakest Precondition:**

$$\begin{array}{l} wp.(\text{if } \dots \text{fi}).Q \equiv (B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_n) \\ \quad \wedge (B_1 \Rightarrow wp.S_1.Q) \\ \quad \wedge (B_2 \Rightarrow wp.S_2.Q) \\ \quad \vdots \\ \quad \wedge (B_n \Rightarrow wp.S_n.Q) \end{array}$$

**Verificación con Weakest Precondition:**

$$\begin{array}{ll} \{P\} \text{ if } B_1 \rightarrow S_1 \{Q\} \\ \square B_2 \rightarrow S_2 \\ \vdots \\ \square B_n \rightarrow S_n \\ \text{fi} \end{array} \equiv P \Rightarrow wp.(\text{if } \dots \text{fi}).Q$$

**Programa anotado:**

$\begin{array}{l} \vdots \\ \{(B_0 \vee B_1 \vee \dots \vee B_n) \wedge \\ (B_0 \Rightarrow wp.S_0.Q) \wedge \dots \wedge (B_n \Rightarrow wp.S_n.Q)\} \\ \text{if } B_0 \rightarrow \\ \quad \{B_0 \wedge wp.S_0.Q\} \\ \quad S_0 \\ \quad \{Q\} \\ \square B_1 \rightarrow \\ \quad \{B_1 \wedge wp.S_1.Q\} \\ \quad S_1 \\ \quad \{Q\} \\ \vdots \\ \square B_n \rightarrow \\ \quad \{B_n \wedge wp.S_n.Q\} \\ \quad S_n \\ \quad \{Q\} \\ \text{fi} \\ \{Q\} \\ \vdots \end{array}$	$\text{ó}$	$\begin{array}{l} \{P\} \\ \text{if } B_0 \rightarrow \\ \quad \{B_0 \wedge P\} \\ \quad S_0 \\ \quad \{Q\} \\ \square B_1 \rightarrow \\ \quad \{B_1 \wedge P\} \\ \quad S_1 \\ \quad \{Q\} \\ \vdots \\ \square B_n \rightarrow \\ \quad \{B_n \wedge P\} \\ \quad S_n \\ \quad \{Q\} \\ \text{fi} \\ \{Q\} \\ \vdots \end{array}$
--	------------	--

**5. Ciclo o repetición (do):**

**Verificación con Ternas de Hoare:**

$$\{P\} \text{ do } B \rightarrow S \text{ od } \{Q\} \equiv \left. \begin{array}{l} \text{Existe } I \text{ (invariante) tal que} \\ P \Rightarrow I \\ \wedge I \wedge \neg B \Rightarrow Q \\ \wedge \{I \wedge B\} S \{I\} \\ \wedge \\ \text{Existe función de cota } t : \text{Estados} \mapsto \text{Int} \\ \text{(i) } I \wedge B \Rightarrow t \geq 0 \\ \text{(ii) } \{I \wedge B \wedge t = T\} S \{t < T\} \end{array} \right\} \text{ (terminación)}$$

**Programa anotado:**

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \{I\} \\ \text{do } B \rightarrow \\ \quad \{I \wedge B\} \\ \quad S \\ \quad \{I\} \\ \text{od} \\ \{I \wedge \neg B\} \\ \vdots \end{array}$$

**Anotaciones Apiladas**

$$\begin{array}{l} \{R\} \\ \{P\} \\ S \\ \{Q\} \end{array} \equiv R \Rightarrow P \wedge \begin{array}{l} \{P\} \\ S \\ \{Q\} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \{P\} \\ S \\ \{Q\} \\ \{R\} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \{P\} \\ S \\ \{Q\} \end{array} \wedge Q \Rightarrow R$$

**Nota:** Las anotaciones apiladas funcionan como si hubiera un **skip**.

## Propiedades

- $\{P\} S \{False\} \equiv (P \equiv False)$  (Exclusión de milagros)
- $wp.S.False \equiv False$
- $wp.S.Q \wedge wp.S.R \equiv wp.S.(Q \wedge R)$
- $wp.S.Q \vee wp.S.R \Rightarrow wp.S.(Q \vee R)$