Algoritmos y Estructuras de Datos I

Digesto para la Programación Imperativa

Relación entre Terna de Hoare y Weakest Precondition

$$\{P\}\ S\ \{Q\}\ \equiv\ P \Rightarrow wp.S.Q$$

1. Skip

Verificación con Terna de Hoare:

$$\{P\}\ \mathbf{skip}\ \{Q\}\ \equiv\ P \Rightarrow Q$$

Weakest Precondition:

$$wp.\mathbf{skip}.Q \equiv Q$$

Verificación con Weakest Precondition:

$$\{P\}\ \mathbf{skip}\ \{Q\}\ \equiv\ P \Rightarrow wp.\mathbf{skip}.Q$$

Programa anotado:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \{Q\} \\ \mathbf{skip} \\ \{Q\} \\ \vdots \end{array}$$

2. Asignación

Verificación con Terna de Hoare:

$$\{P\}\ x_1,\ldots,x_n := E_1,\ldots,E_n\ \{Q\}\ \equiv\ P \Rightarrow Q(x_1 \leftarrow E_1,\ldots,x_n \leftarrow E_n)$$

Nota: "$\leftarrow$" es el reemplazo sintáctico de una variable por una expresión.

Weakest Precondition:

$$wp.(x_1,\ldots,x_n := E_1,\ldots,E_n).Q\ \equiv\ Q(x_1 \leftarrow E_1,\ldots,x_n \leftarrow E_n)$$

Verificación con Weakest Precondition:

$$\{P\}\ x_1,\ldots,x_n := E_1,\ldots,E_n\ \{Q\}\ \equiv\ P \Rightarrow wp.(x_1,\ldots,x_n := E_1,\ldots,E_n).Q$$

Programa anotado:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \{Q(x_1 \leftarrow E_1,\ldots,x_n \leftarrow E_n)\} \\ x_1,\ldots,x_n := E_1,\ldots,E_n \\ \{Q\} \\ \vdots \end{array}$$

3. Secuenciación, composición o concatenación (;):

Verificación con Terna de Hoare:

$$\{P\}\ S;T\ \{Q\}\ \equiv \text{Existe } R \text{ tal que } \{P\}\ S\ \{R\} \wedge \{R\}\ T\ \{Q\}$$

Weakest Precondition:

$$wp.(S;T).Q\ \equiv\ wp.S.(wp.T.Q)$$

Verificación con Weakest Precondition:

$$\{P\}\ S;T\ \{Q\}\ \equiv P \Rightarrow wp.(S;T).Q$$

Programa anotado:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \{wp.S.(wp.T.Q)\} \\ S; \\ \{wp.T.Q\} \\ T \\ \{Q\} \\ \vdots \end{array}$$

4. Condicional o alternativa (if):

Verificación con Terna de Hoare:

$$\begin{array}{llllll} \{P\} & \textbf{if} & B_1 \to S_1 & \{Q\} & \equiv & P \Rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n) \\ & \Box & B_2 \to S_2 & & & \wedge\ \{B_1 \wedge P\}\ S_1\ \{Q\} \\ & \vdots & & & & \wedge\ \{B_2 \wedge P\}\ S_2\ \{Q\} \\ & \Box & B_n \to S_n & & & \vdots \\ & \textbf{fi} & & & & \wedge\ \{B_n \wedge P\}\ S_n\ \{Q\} \end{array}$$

Weakest Precondition:

$$\begin{array}{lll} wp.(\textbf{if} \ldots \textbf{fi}).Q & \equiv & (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n) \\ & & \wedge\ (B_1 \Rightarrow wp.S_1.Q) \\ & & \wedge\ (B_2 \Rightarrow wp.S_2.Q) \\ & & \vdots \\ & & \wedge\ (B_n \Rightarrow wp.S_n.Q) \end{array}$$

Verificación con Weakest Precondition:

$$\begin{array}{llllll} \{P\} & \textbf{if} & B_1 \to S_1 & \{Q\} & & \\ & \Box & B_2 \to S_2 & & & \\ & \vdots & & & \equiv & P \Rightarrow wp.(\textbf{if} \ldots \textbf{fi}).Q \\ & \Box & B_n \to S_n & & & \\ & \textbf{fi} & & & & \end{array}$$

Programa anotado:

$$
\begin{array}{l}
\vdots \\
\{(B_0 \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n) \wedge \\
\;(B_0 \Rightarrow wp.S_0.Q) \wedge \ldots \wedge (B_n \Rightarrow wp.S_n.Q)\} \\
\;\textbf{if } B_0 \rightarrow \\
\qquad \{B_0 \wedge wp.S_0.Q\} \\
\qquad S_0 \\
\qquad \{Q\} \\
\;\square \;\; B_1 \rightarrow \\
\qquad \{B_1 \wedge wp.S_1.Q\} \\
\qquad S_1 \\
\qquad \{Q\} \\
\;\vdots \\
\;\square \;\; B_n \rightarrow \\
\qquad \{B_n \wedge wp.S_n.Q\} \\
\qquad S_n \\
\qquad \{Q\} \\
\;\textbf{fi} \\
\{Q\} \\
\vdots
\end{array}
$$

5. Ciclo o repetición (do):

Verificación con Ternas de Hoare:

$$
\{P\}\ \textbf{do}\ B\ \rightarrow\ S\ \textbf{od}\ \{Q\} \quad \equiv \quad
\begin{array}{l}
\text{Existe } I \text{ (invariante) tal que} \\
P \Rightarrow I \\
\wedge\ I \wedge \neg B \Rightarrow Q \\
\wedge\ \{I \wedge B\}\ S\ \{I\} \\
\wedge \\
\left.\begin{array}{l}
\text{Existe función de cota } t : Estados \mapsto Int \\
\text{(i) } I \wedge B\ \Rightarrow\ t \geq 0 \\
\text{(ii) } \{I \wedge B \wedge t = T\}\ S\ \{t < T\}
\end{array}\right\} \text{(terminación)}
\end{array}
$$

Programa anotado:

$$
\begin{array}{l}
\quad \vdots \\
\{I\} \\
\textbf{do } B \rightarrow \\
\qquad \{I \wedge B\} \\
\qquad S \\
\qquad \{I\} \\
\textbf{od} \\
\{I \wedge \neg B\} \\
\quad \vdots
\end{array}
$$

Anotaciones Apiladas

$$
\begin{array}{c}
\{R\} \\
\{P\} \\
S \\
\{Q\}
\end{array}
\quad \equiv \quad R \Rightarrow P\ \wedge\
\begin{array}{c}
\{P\} \\
S \\
\{Q\}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\{P\} \\
S \\
\{Q\} \\
\{R\}
\end{array}
\quad \equiv \quad
\begin{array}{c}
\{P\} \\
S \\
\{Q\}
\end{array}
\ \wedge\ Q \Rightarrow R
$$

Nota: Las anotaciones apiladas funcionan como si hubiera un **skip**.

Propiedades

- $\{P\}\ S\ \{False\}\ \equiv\ (P \equiv False)$ (Exclusión de milagros)
- $wp.S.\,False \equiv False$
- $wp.S.Q \wedge wp.S.R\ \equiv\ wp.S.(Q \wedge R)$
- $wp.S.Q \vee wp.S.R\ \Rightarrow\ wp.S.(Q \vee R)$