

Práctico 4

Programación imperativa

Algoritmos y Estructuras de Datos I
1^{er} cuatrimestre 2019

1. (Algoritmo de la división) Dados dos números, hay que encontrar el cociente y el resto de la división entera entre ellos.

Ayuda: Para enteros $x \geq 0$ e $y > 0$, el cociente q y el resto r de la división entera de x por y están caracterizados por $x = q * y + r \wedge 0 \leq r \wedge r < y$. Por lo tanto, debemos derivar un programa S que satisfaga

Var $x, y, q, r : Int$;
 $\{P : x \geq 0 \wedge y > 0\}$ (precondición)
S
 $\{Q : x = q * y + r \wedge 0 \leq r \wedge r < y\}$ (postcondición)
donde las variables x y y no cambian.

2. Sea $N \geq 0$, especificar y derivar un programa que calcule el menor entero x que satisface $x^3 + x \geq N$.
3. (Suma de los elementos de un arreglo) Dado un arreglo de enteros, se debe devolver en una variable la suma de todos los elementos del arreglo.

Ayuda: Debemos derivar un programa que satisfaga la siguiente especificación:

Const $N : Int$;
Var $a : array [0, N) of Int$;
 $s : Int$;
 $\{P : N \geq 0\}$
S
 $\{Q : s = \langle \sum i : 0 \leq i < N : a.i \rangle\}$
donde el arreglo a no cambia.

4. Sea a un arreglo de enteros.
 - a) Especificar y derivar un programa que determine si todos los elementos de a son mayores a 0.
 - b) Especificar y derivar un programa que determine si algún elemento de a es mayor a 0.
5. Dado un arreglo $a : array[0, N) of Num$ con $N \geq 0$ determinar si alguno de sus elementos es igual a la suma de los anteriores.
6. Dado un arreglo $a : array[0, N) of Num$ con $N \geq 0$ determinar si sus elementos son iguales al factorial de la posición.

Ayuda: Que los elementos sean el factorial de la posición se puede expresar como $\langle \forall i : 0 \leq i < N : a.i = i! \rangle$.

7. Especificar y hacer un programa imperativo que calcule fibonacci de un número dado.

8. (Máxima diferencia) Dado un arreglo de enteros, se debe tomar la máxima diferencia entre dos de sus elemento (en orden, el primero menos el segundo).

La especificación del programa es:

```
Const N : Int;
Var a : array[0, N) of Int; r : Int;
{P : N ≥ 2}
S
{Q : r = ⟨Max p, q : 0 ≤ p < q < N : a.p - a.q⟩}
```

9. (Segmento de suma máxima) Dado un arreglo de enteros, se debe guardar en una variable la suma del segmento de suma máxima del arreglo.

La especificación del programa es:

```
Const N : Int;
Var a : array[0, N) of Int; r : Int;
{P : N ≥ 0}
S
{Q : r = ⟨Max p, q : 0 ≤ p ≤ q ≤ N : sum.p.q⟩
  || [sum.p.q = ⟨∑ i : p ≤ i < q : a.i⟩]⟩}
```

10. (Cantidad de productos positivos) Derivar un programa para la siguiente especificación:

```
Const M : Int;
Var a : array[0, M) of Int; r : Int;
{P : M ≥ 0}
S
{Q : r = ⟨N p, q : 0 ≤ p < q < M : a.p * a.q ≥ 0⟩}
```

11. Derivar el siguiente programa

```
Const N : Int;
Var a : array [0, N) of Num;
    r : Bool;
{N ≥ 0}
S
{r = ⟨∀ i : 0 ≤ i < N : ⟨∑ j : 0 ≤ j ≤ i : a.j⟩ > 0⟩}
```

12. (Máxima diferencia cuadrada) Derivar un programa para la siguiente especificación:

```
Const N : Int;
Var a : array[0, N) of Int; r : Int;
{P : N ≥ 2}
S
{Q : r = ⟨Max p, q : 0 ≤ p < q < N : (a.p - a.q)2⟩}
```

13. Derivar un programa para la siguiente especificación:

```
Const N : Int;
Var a : array[0, N) of Int; r : Int;
{P : N ≥ 2}
S
{Q : r ≡ ⟨∃ p, q : 0 ≤ p < q < N : a.p - a.q ≤ 8⟩}
```

Ayuda: reescribir la postcondición usando el operador de mínimo.

14. (Varianza) Especificar y derivar un programa que calcule la varianza de los valores almacenados en un arreglo.

Ayuda: La varianza de n valores $\{x_1, \dots, x_n\}$ se define como:

$$\frac{\langle \sum_{i : 1 \leq i \leq n} (x_i - \bar{x})^2 \rangle}{n}$$

donde \bar{x} es el promedio de los valores.

15. (Búsqueda de un elemento) Especificar y derivar un programa que dado un número devuelva la posición donde se encuentra en un arreglo. Si el elemento no está en el arreglo se debe devolver -8 .

Ejercicios extra

16. Sea $N \geq 0$, especificar y derivar un programa que calcule el mayor entero x que satisface $x^3 + x \leq N$.
17. Especificar y derivar un programa que calcule la cantidad de elementos pares de un arreglo de enteros.
18. Decir con palabras que pide cada especificación y derivar los programas correspondientes.

a) Const $N : Int, a : array[0, N) \text{ of } Int;$
 Var $r : Bool;$
 $\{P : N > 1\}$
 S
 $\{Q : r \equiv \langle \exists i : 2 \leq i < N : a.i = a.(i-1) + a.(i-2) \rangle\}$

b) Const $N : Int, a : array[0, N) \text{ of } Int;$
 Var $r : Num;$
 $\{P : N > 0\}$
 S
 $\{Q : r = \langle \sum i : 0 \leq i < N - 1 : a.i + a.(i+1) \rangle\}$

19. Especificar y derivar un programa que guarde en una variable el máximo de los primeros n elementos de un arreglo de tamaño N con $0 < n \leq N$. Tener en cuenta que **no se pueden usar** los valores $\infty, -\infty$.

Una vez finalizado el ejercicio pensar como se podría modificar el programa para detectar el caso en que el arreglo sea vacío.

20. Derivar el siguiente programa

Const $N : Int;$
 Var $a : array [0, N) \text{ of } Int;$
 $r : Int;$
 $\{P : N > 0\}$
 S
 $\{Q : r = \langle \text{Max } i : 0 \leq i < N \wedge \langle \forall j : 0 < j < i : a.(j-1) < a.j \rangle : i \rangle\}$

Nota: Antes de derivar decir que debería hacer el programa.

Nota: No se puede usar ∞ en el programa.

21. Derivar el siguiente programa

```
Const  $N : Int$ ;  
Var  $a : array [0, N) \text{ of } Int$ ;  
     $r : Int$ ;  
{ $N \geq 0$ }  
S  
{ $r = \langle \sum i : 0 \leq i < N \wedge 0 \leq a.i \leq N : a.(a.i) \rangle$ }  
donde el arreglo  $a$  no cambia.
```

22. Derivar el siguiente programa

```
Const  $M : Int$ ;  
Var  $a : array [0, M) \text{ of } Int$ ;  
     $r : Int$ ;  
{ $M \geq 0$ }  
S  
{ $r = \langle \sum i : 0 \leq i < M : \langle \sum j : 0 \leq j < i : a.j \rangle \leq i * a.i \rangle$ }  
donde el arreglo  $a$  no cambia.
```

23. Considere el ejercicio 4.

a) En el programa derivado en el ejercicio 4a se recorre todo el arreglo? Si la respuesta es afirmativa piense si esto es necesario. Si no lo es busque una manera de derivar un programa equivalente que no recorra innecesariamente todo el arreglo.

b) Repita el mismo razonamiento sobre el ejercicio 4b y derive si es necesario el programa mejorado.

24. (Búsqueda lineal) Dada $f : Nat \mapsto Bool$ y suponiendo $\langle \exists n : 0 \leq n : f.n \rangle$, encontrar el mínimo natural x tal que $f.x$.