Algoritmos y Estructuras de Datos I - Recursado - 2010
Práctico 1

1. Enunciar las reglas de rango vacío, rango unitario y partición de rango para los cuantificadores universal y existencial.

2. Probar la regla de intercambio para el cuantificador existencial usando la del cuantificador universal y De Morgan: $(\exists\ i\ :\ R.i\ :\ T.i) \equiv (\exists\ i\ ::\ R.i \wedge T.i)$.

3. Demostrar: $(\exists\ x, y\ :\ x = y\ :\ P.x.y) \equiv (\exists\ x\ ::\ P.x.x)$. Ayuda: $P \equiv P \wedge True$.

4. Probar que la implicación es distributiva con respecto al cuantificador universal: $(\forall\ i\ :\ R.i\ :\ Z \Rightarrow T.i) \equiv Z \Rightarrow (\forall\ i\ :\ R.i\ :\ T.i)$.

5. Probar las **reglas de instanciación** para la cuantificación universal y existencial:
   a) $(\forall\ i\ ::\ f.i) \Rightarrow f.x$.
   b) $f.x \Rightarrow (\exists\ i\ ::\ f.i)$.

   Ayuda: $True \equiv i = x \vee i \neq x$.

6. Enunciar las reglas de rango vacío, rango unitario y partición de rango los siguientes cuantificadores:

   a) Sumatoria
   b) Productoria
   c) Máximo
   d) Mínimo

7. Sea $\oplus$ un cuantificador asociado a un operador conmutativo y asociativo. Probar la siguiente regla de eliminación de una *dummy* (Z no depende de i ni de j): $(\oplus i, j\ :\ i = Z \wedge R.i.j\ :\ T.i.j) \equiv (\oplus j\ :\ R.Z.j\ :\ T.Z.j)$.

8. Demostrar la siguiente relación entre el máximo y el mínimo: $(Min\ i\ :\ R.i\ :\ -F.i) = -(Max\ i\ :\ R.i\ :\ F.i)$.

   Ayuda: darle un nombre al máximo (o al mínimo) y luego describir qué significa que sea el máximo (o el mínimo).

9. El cuantificador aritmético N está definido por: $(N\,i\ :\ R.i\ :\ T.i) \doteq (\sum i\ :\ R.i \wedge T.i\ :\ 1)$.
   a) Enunciar y demostrar la regla de partición de rango para N.
   b) Ídem con la regla del rango vacío.
   c) Probar: $(\sum i\ :\ R.i \wedge T.i\ :\ k) = k * (N\,i\ :\ R.i\ :\ T.i)$

10. Deemostrar la regla de rango unitario para el cuantificador N, usando la definición de N y análisis por casos.

11. Suponiendo que: *a*) $x = (\sum i\ :\ R.i\ :\ f.i)$ y *b*) $R.i \not\equiv i = N$ para cualquier i, calcular una expresión libre de cuantificadores equivalente a: $(\sum i\ :\ R.i \vee i = N\ :\ f.i)$.

12. Suponiendo que: *a*) $x = (Max\ i, j\ :\ R.i.j \wedge j < N + 1\ :\ f.i.j)$ y *b*) $y = (Max\ i\ :\ R.i.(N+1)\ :\ f.i.(N+1))$, calcular una expresión libre de cuantificadores equivalente a: $(Max\ i, j\ :\ R.i.j \wedge (j < N+1 \vee j = N+1)\ :\ f.i.j)$.

13. Suponiendo que: *a*) $x = (Max\ i\ :\ R.i.N\ :\ f.i.N)$, *b*) $R.y.(z+1) = R.y.z\ \vee\ y = z+1$ para cualquier y, z, *c*) $f.y.y = 0$ para cualquier y, *d*) $f.y.(z+1) = f.y.z + g.z$ para cualquier y, z y *e*) $R.y.z \not\equiv False$ para cualquier y, z, calcular una expresión libre de cuantificadores equivalente a: $(Max\ i\ :\ R.i.(N+1)\ :\ f.i.(N+1))$.

14. Suponiendo que: *a*) $x \equiv (\forall\ i, j\ :\ R.i.j \wedge j < N\ :\ f.i \Rightarrow f.j)$ y *b*) $y \equiv (\forall\ i\ :\ R.i.N\ :\ \neg f.i)$, calcular una expresión libre de cuantificadores equivalente a: $(\forall\ i, j\ :\ R.i.j \wedge (j < N \vee j = N)\ :\ f.i \Rightarrow f.j)$.

15. *a*) Probar la siguiente versión de la regla de intercambio para el cuantificador universal: $(\forall\ i\ :\ R.i \wedge S.i\ :\ T.i) \equiv (\forall\ i\ :\ R.i\ :\ S.i \Rightarrow T.i)$.

    b) Suponiendo válidas las reglas del término, de intercambio, anidado, distributividad, De Morgan e instanciación, demostrar las siguientes reglas para el cuantificador universal:

(i) $(\forall\, i : R.i : True) \equiv True$. (ii) Partición de rango. (iii) Partición de rango generalizada.

(iv)* Cambio de variables. Sugerencia: demostrar las siguientes implicaciones:

- $(\forall\, i : R.i : T.i) \Rightarrow (\forall\, j : R.(f.j) : T.(f.j))$ para *cualquier* función f.
- usando lo anterior, demostrar: $(\forall\, i : R.i : T.i) \Leftarrow (\forall\, j : R.(f.j) : T.(f.j))$ para f *invertible*.

16. Demostrar que para cualquier $\oplus$, R, S y T se cumple:
$(\oplus i : R : T) \oplus (\oplus i : S : T) \equiv (\oplus i : R \vee S : T) \oplus (\oplus i : R \wedge S : T)$.
Notar: es la versión general del ejercicio $15b$(iii).