Algoritmos y Estructuras de Datos II

Ordenación

7 de marzo de 2016

Contenidos

Generalidades

Toda la información sobre la materia se encuentra en la wiki, accesible desde cs.famaf.unc.edu.ar/wiki

Algoritmos y Estructuras de Datos

- Introducción a los Algoritmos
  Algoritmos y Estructuras de Datos I
  - pre- y post- condiciones
  - “qué” hace un algoritmo
- Algoritmos y Estructuras de Datos II
  - “cómo” hace el algoritmo

Ejemplo de "qué" y "cómo" de un algoritmo

Ejemplo:

un algoritmo para contar los ceros de un arreglo de enteros.

- "Qué": devuelve (o cuenta o computa) el número de ocurrencias del número 0 en el arreglo dado.
- "Cómo": recorre el arreglo de izquierda a derecha incrementando un contador cada vez que observa un 0.

Análisis de algoritmos

Analizar el "cómo" permite

- predecir el tiempo de ejecución (eficiencia en tiempo)
- predecir el uso de memoria (eficiencia en espacio)
- predecir el uso de otros recursos
- comparar distintos algoritmos para un mismo problema

Organización de la materia

La materia está organizada en tres partes:

- Análisis de algoritmos.
  - Cómo se ejecutan los algoritmos y estimar cuánto trabajo realiza.
- Estructuras de datos.
  - Tipos de datos concretos y abstractos.
- Algoritmos avanzados.
  - Algunas técnicas para resolver problemas algorítmicos.

Problema del pintor

Un pintor tarda una hora y media en pintar una pared de 3 metros de largo. ¿Cuánto tardará en pintar una de 5 metros de largo?

$$\begin{array}{rcr} \text{3 metros} & \longleftrightarrow & \text{90 minutos} \\ \text{1 metro} & \longleftrightarrow & \text{30 minutos} \\ \text{5 metros} & \longleftrightarrow & \text{150 minutos} \end{array}$$

Solución: dos horas y media.
El trabajo de pintar la pared es **proporcional** a su longitud.

Problema del bibliotecario

Un bibliotecario tarda un día en ordenar alfabéticamente una biblioteca con 1000 expedientes. ¿Cuánto tardará en ordenar una con 2000 expedientes?

Razonamiento similar

$$\begin{array}{lcl} \text{1000 expedientes} & \longleftrightarrow & \text{1 día} \\ \text{2000 expedientes} & \longleftrightarrow & \text{2 días} \end{array}$$

Solución: dos días.
¿Está bien? ¿Es el trabajo de ordenar expedientes **proporcional** a la cantidad de expedientes a ordenar?

Otros problemas
del pintor

*Un pintor tarda una hora y media en pintar una pared **cuadrada** de 3 metros de lado. ¿Cuánto tardará en pintar una de 5 metros de lado?*

$$
\begin{array}{rcr}
\text{9 metros cuadrados} & \longleftrightarrow & \text{90 minutos} \\
\text{1 metro cuadrado} & \longleftrightarrow & \text{10 minutos} \\
\text{25 metros cuadrados} & \longleftrightarrow & \text{250 minutos}
\end{array}
$$

Solución: cuatro horas y 10 minutos.
El trabajo de pintar la pared cuadrada es **proporcional** a su superficie, que es proporcional al cuadrado del lado.

Otros problemas
el del globo esférico

Si lleva cinco horas inflar un globo aerostático esférico de 2 metros de diámetro, ¿cuánto llevará inflar uno de 4 metros de diámetro?

El trabajo de inflar el globo es **proporcional** a su volumen, que es proporcional al cubo del diámetro ($V = \frac{\pi d^3}{6}$).

diámetro = 2	$\longleftrightarrow$	k metros cúbicos	$\longleftrightarrow$	5 horas
diámetro = 4	$\longleftrightarrow$	8k metros cúbicos	$\longleftrightarrow$	40 horas

Solución: cuarenta horas.

Algoritmos de ordenación

Para resolver el problema del bibliotecario, es necesario

- establecer a qué es proporcional la tarea de ordenar expedientes,
- estudiar métodos de ordenación,
- asumiremos la existencia de elementos o items a ordenar,
- relacionados por un orden total,
- que deben ordenarse de menor a mayor y
- que no necesariamente son diferentes entre sí.

¿Cómo?

Reflexionemos sobre lo siguiente:

- ¿Qué significa que una secuencia de libros, números, palabras, etc. esté ordenada?
- ¿Cómo hacen para controlar si una secuencia de números está ordenada?
  - (a esta pregunta la vamos a continuar en el práctico y en el laboratorio)
- ¿Cómo harían para ordenar de menor a mayor ciertos datos o ciertas cosas físicas que están desordenados/as?
  - números
  - cartas de un juego,
  - palabras,
  - libros.

Ordenación por selección

Idea

- Es el algoritmo de ordenación más sencillo (pero no el más rápido),
- **selecciona** el menor de todos, lo coloca en el primer lugar apartándolo del resto,
- **selecciona** el menor de todos **los restantes**, lo coloca en el segundo lugar apartándolo del resto,
- **selecciona** el menor de todos **los restantes**, lo coloca en el tercer lugar apartándolo del resto,
- . . . (*en cada uno de estos pasos ordena un elemento*) . . .
- hasta terminar.

Ordenación por selección
Ejemplo

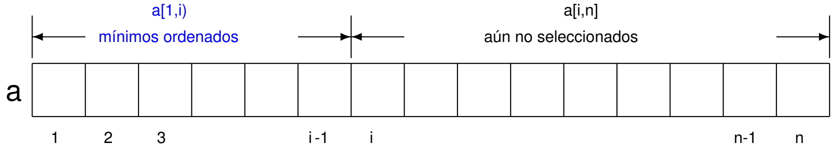
9	3	1	3	5	2	7
9	3	1	3	5	2	7
1	3	9	3	5	2	7
1	3	9	3	5	2	7
1	2	9	3	5	3	7
1	2	9	3	5	3	7
1	2	3	9	5	3	7

1	2	3	9	5	3	7
1	2	3	3	5	9	7
1	2	3	3	5	9	7
1	2	3	3	5	9	7
1	2	3	3	5	9	7
1	2	3	3	5	7	9

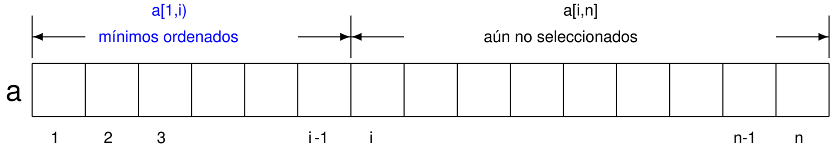
Demo (www.sorting-algorithms.com)

Ordenación por selección

En un arreglo



Ordenación por selección
Invariante



- Invariante:
  - el arreglo a es una permutación del original,
  - un segmento inicial a[1,i) del arreglo está ordenado, y
  - dicho segmento contiene los elementos mínimos del arreglo.

Ordenación por selección
Pseudocódigo

{Pre: $n \geq 0 \wedge a = A$}
proc selection_sort (**in/out** a: **array**[1..n] **of T**)
    var i, minp: **nat**
    i:= 1   {Inv: Invariante de recién}
    do i $<$ n $\rightarrow$ minp:= min_pos_from(a,i)
        swap(a,i,minp)
        i:= i+1
    od
end proc
{Post: a está ordenado y es permutación de A}

Ordenación por selección

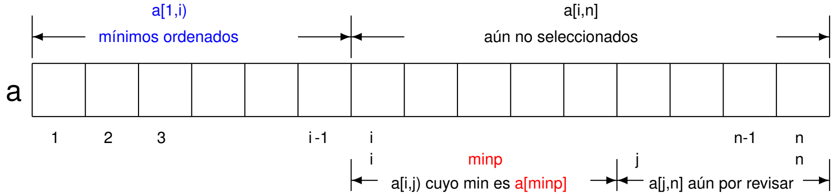
Swap o intercambio

{Pre: $a = A \wedge 1 \leq i,j \leq n$ }
proc swap (**in**/**out** a: **array**[1..n] **of T**, **in** i,j: **nat**)
  var tmp: **T**
  tmp:= a[i]
  a[i]:= a[j]
  a[j]:= tmp
end proc
{Post: $a[i] = A[j] \wedge a[j] = A[i] \wedge \forall k.\ k \notin \{i,j\} \Rightarrow a[k]=A[k]$}

¡Garantiza permutación!

Ordenación por selección

Invariante de la función de selección



- Invariante:
  - invariante anterior, y
  - el mínimo del segmento a[i,j) está en la posición minp.

Ordenación por selección
Función de selección

{Pre: $0 < i \leq n$}
fun min_pos_from (a: **array**[1..n] **of T**, i: **nat**) **ret** minp: **nat**
    var j: **nat**
    minp:= i
    j:= i+1   {Inv: a[minp] es el mínimo de a[i,j)}
    do $j \leq n \rightarrow$ **if** $a[j] < a[minp]$ **then** minp:= j **fi**
        j:= j+1
    od
end fun
{Post: a[minp] es el mínimo de a[i,n]}

Comando **for**

Fragmentos de la siguiente forma aparecen con frecuencia:

k:= n
do k $\leq$ m $\rightarrow$ C
        k:= k+1
od

Por simplicidad, lo reemplazaremos por

for k:= n **to** m **do** C **od**

siempre que k no se modifique en C.
Además, asumiremos que el **for** declara la variable k, cuya vida dura sólo durante la ejecución del ciclo.

Comando **for**

Reemplazo en min_pos_from

```
fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
    var j: nat
    minp:= i
    j:= i+1
    do j ≤ n → if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
               j:= j+1
    od
end fun
fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
    minp:= i
    for j:= i+1 to n do if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
    od
end fun
```

Comando **for**

Reemplazo en selection_sort

```
proc selection_sort (in/out a: array[1..n] of T)
      var i, minp: nat
      i:= 1
      do i < n → minp:= min_pos_from(a,i)
                 swap(a,i,minp)
                 i:= i+1
      od
end proc
```

Comando for

En selection_sort

proc selection_sort (**in**/**out** a: **array**[1..n] **of T**)
    var minp: **nat**
    for i:= 1 **to** n-1 **do**
        minp:= min_pos_from(a,i)
        swap(a,i,minp)
    od
end proc

fun min_pos_from (a: **array**[1..n] **of T**, i: **nat**) **ret** minp: **nat**
    minp:= i
    for j:= i+1 **to** n **do if** a[j] $<$ a[minp] **then** minp:= j **fi**
    od
end fun

Problema del bibliotecario

Cuando el algoritmo es la ordenación por selección

- ¿Cómo se respondería el problema del bibliotecario si el algoritmo utilizado por él fuera el de ordenación por selección?
- ¿Cuánto más trabajo resulta ordenar 2000 expedientes que 1000 con este algoritmo?
- ¿Cuánto trabajo es ordenar 2000 expedientes (con este algoritmo)?
- ¿Cuánto trabajo es ordenar 1000 expedientes (con este algoritmo)?
- ¿Cuánto trabajo es ordenar n expedientes (con este algoritmo)?

Problema del bibliotecario

Análisis

- Para contestar estas preguntas habría que **analizar** el algoritmo de ordenación por selección, es decir, contar cuántas operaciones elementales realiza.
- Cuántas sumas, asignaciones, llamadas a funciones, comparaciones, intercambios, etc.
- En vez de eso, se elige una operación **representativa.**
- ¿Qué es una operación **representativa**?
- Una tal que se repite más que o tanto como cualquier otra.
- Hay que buscar la que **más se repite**.

Analizando el procedimiento selection_sort

- selection_sort **contiene un ciclo**,
- **allí** debe estar la operación que más se repite,
- encontramos **una llamada** a la función min_pos_from y **una llamada** al procedimiento swap,
- el procedimiento swap **es constante** (siempre realiza 3 asignaciones elementales),
- la función min_pos_from, en cambio, **tiene un ciclo**,
- nuevamente **allí** debe estar la operación que más se repite,
- encontramos **una comparación** entre elementos de a, y **una asignación** (condicionada al resultado de la comparación).

Analizando ordenación por selección

Conclusión

- La **operación que más se repite es la comparación** entre elementos de a,
- **toda otra operación se repite a lo sumo de manera proporcional** a esa,
- por lo tanto, **la comparación** entre elementos de a **es representativa** del trabajo de la ordenación por selección.
- Esto es habitual: para medir la eficiencia de los algoritmos de ordenación es habitual considerar el número de comparaciones entre elementos del arreglo.
- Veremos luego que acceder (o modificar) una celda de un arreglo es **constante**: su costo no depende de cuál es la celda, ni de la longitud del arreglo.

¿Cuántas comparaciones realiza la ordenación por selección?

- Al llamarse a min_pos_from(a,i) se realizan n-i comparaciones.
- selection_sort llama a min_pos_from(a,i) para $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
- por lo tanto, en total son (n-1) + (n-2) + ... + (n-(n-1)) comparaciones.
- es decir, (n-1) + (n-2) + ... + 1 = $\frac{n*(n-1)}{2}$ comparaciones.

Resolviendo el problema del bibliotecario

Con la fórmula obtenida

Para un arreglo de tamaño n, son $\frac{n*(n-1)}{2}$ comparaciones.

1000 expedientes	$\longleftrightarrow$	499500 comparaciones	$\longleftrightarrow$	1 día
2000 expedientes	$\longleftrightarrow$	1999000 comparaciones	$\longleftrightarrow$	4 días

Solución: 4 días.

Resolviendo el problema del bibliotecario

Con una fórmula simplificada

Como $\frac{n*(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$, el número de comparaciones es proporcional n^2.

$$\begin{array}{ccccc} 1000 \text{ expedientes} & \longleftrightarrow & 1000000 \text{ comparaciones} & \longleftrightarrow & 1 \text{ día} \\ 2000 \text{ expedientes} & \longleftrightarrow & 4000000 \text{ comparaciones} & \longleftrightarrow & 4 \text{ días} \end{array}$$

Solución: 4 días.
Conviene utilizar la expresión n^2 para contestar la pregunta; es más sencillo y da el mismo resultado.

Número de operaciones de un comando

- Una vez que uno sabe qué **operación** quiere contar, debe imaginar una ejecución arbitraria, genérica del comando intentando contar el número de veces que esa ejecución arbitraria realizará **dicha operación.**
- Ése es el verdadero método para contar.
- Es imprescindible comprender **cómo** se ejecuta el comando.
- A modo de ayuda, en las filminas que siguen se da un método imperfecto para ir aprendiendo.
- El método supone que ya sabemos cuál **operación** queremos contar.

Número de operaciones de un comando

Secuencia de comandos

- Una secuencia de comandos se ejecuta de manera secuencial, del primero al último.
- La secuencia se puede escribir horizontalmente: $C_1;C_2;\ldots;C_n$
- o verticalmente

$$\begin{array}{l} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{array}$$

Número de operaciones de un comando

Secuencia de comandos

- Para contar cuántas veces se ejecuta **la operación**, entonces, se cuenta cuántas veces se ejecuta en el primero, cuántas en el segundo, etc. y luego se suman los números obtenidos:
- $\text{ops}(C_1;C_2;\ldots;C_n) = \text{ops}(C_1) + \text{ops}(C_2) + \ldots + \text{ops}(C_n)$
- $\text{ops}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \text{ops}(C_1) + \text{ops}(C_2) + \ldots + \text{ops}(C_n)$

Número de operaciones de un comando

Comando **skip**

- El comando **skip** equivale a una secuencia vacía:
- ops(**skip**) $= 0$

Número de operaciones de un comando

Comando **for**

- El comando **for** k:= n **to** m **do** C(k) **od** “equivale” también a una secuencia:
- **for** k:= n **to** m **do** C(k) **od** “equivale” a

$$\begin{array}{l} C(n) \\ C(n+1) \\ \vdots \\ C(m) \end{array}$$

Número de operaciones de un comando

Comando **for**

- De esta “equivalencia” resulta

$$\text{ops}(\textbf{for}\ \text{k:= n}\ \textbf{to}\ \text{m}\ \textbf{do}\ \text{C(k)}\ \textbf{od}) =$$
$$= \text{ops}(\text{C(n)}) + \text{ops}(\text{C(n+1)}) + \ldots + \text{ops}(\text{C(m)})$$

- que también se puede escribir

$$\text{ops}(\textbf{for}\ \text{k:= n}\ \textbf{to}\ \text{m}\ \textbf{do}\ \text{C(k)}\ \textbf{od}) = \sum_{k=n}^{m} \text{ops}(\text{C(k)})$$

Número de operaciones de un comando

Comando **for** (una salvedad importante)

La ecuación

$$\text{ops}(\textbf{for}\ \text{k:= n}\ \textbf{to}\ \text{m}\ \textbf{do}\ \text{C(k)}\ \textbf{od}) = \sum_{k=n}^{m} \text{ops}(\text{C(k)})$$

solamente vale cuando **no hay interés en contar las operaciones que involucran el índice k** implícitas en el **for**: inicialización, comparación con la cota m, incremento; ni el cómputo de los límites n y m. Por eso escribimos "equivale" entre comillas. En los apuntes hay otras ecuaciones posibles para el caso en que sí deseen contarse.

Número de operaciones de un comando

Comando condicional **if**

- El comando **if** b **then** C **else** D **fi** se ejecuta evaluando la condición b y luego, en función del valor de verdad que se obtenga, ejecutando C (caso verdadero) o D (caso falso).
- Para contar cuántas veces se ejecuta **la operación**, entonces, se cuenta cuántas veces se la ejecuta durante la evaluación de b y luego cuántas en la ejecución de C o D
- ops(**if** b **then** C **else** D **fi**) $= \begin{cases} \text{ops(b)+ops(C)} & b \text{ es V} \\ \text{ops(b)+ops(D)} & b \text{ es F} \end{cases}$

Número de operaciones de un comando
Asignación

- El comando x:=e se ejecuta evaluando la expresión e y modificando la posición de memoria donde se aloja la variable x con el valor de e.
- $$\text{ops(x:=e)} = \begin{cases} \text{ops(e)+1} & \text{si se desea contar la asignación} \\ & \text{o las modificaciones de memoria} \\ \text{ops(e)} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
- Tener en cuenta que la evaluación de e puede implicar la llamada a funciones auxiliares cuyas operaciones deben ser también contadas.

Número de operaciones de un comando

El ciclo **do**

- El ciclo **do** b $\rightarrow$ C **od** (o equivalente **while** b **do** C **od**) se ejecuta evaluando la condición b, y dependiendo de si su valor es V o F se continúa de la siguiente manera:
  - si su valor fue F, la ejecución termina inmediatamente
  - si su valor fue V, la ejecución continúa con la ejecución del cuerpo C del ciclo, y luego de eso vuelve a ejecutarse todo el ciclo nuevamente.
- Es decir que su ejecución es una secuencia de evaluaciones de la condición b y ejecuciones del cuerpo C que finaliza con la primera evaluación de b que dé F.

Número de operaciones de un comando

El ciclo **do**

Es decir, la ejecución del ciclo **do** b $\rightarrow$ C **od** “equivale” a la ejecución de

if b **then** C
    if b **then** C
        if b **then** C
            if b **then** C
                . . . ¡¡ indefinidamente !!
            else skip
        else skip
    else skip
else skip

Número de operaciones de un comando

El ciclo **do**

$$\text{ops}(\textbf{do}\ \text{b} \rightarrow \text{C}\ \textbf{od}) = \text{ops}(\text{b}) + \sum_{\text{k}=1}^{n} d_k$$

donde

- n es el número de veces que se ejecuta el cuerpo del **do**
- d_k es el número de operaciones que realiza la k-ésima ejecución del cuerpo C del ciclo y la subsiguiente evaluación de la condición o guarda b

Número de operaciones de una expresión

- Similares ecuaciones se pueden obtener para la evaluación de expresiones.
- Por ejemplo, para evaluar la expresión e<f, primero se evalúa la expresión e, luego se evalúa la expresión f y luego se comparan dichos valores.
- $$\text{ops(e<f)} = \begin{cases} \text{ops(e)+ops(f)+1} & \text{si se cuentan comparaciones} \\ \text{ops(e)+ops(f)} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo: número de comparaciones de la ordenación por selección

```
proc selection_sort (in/out a: array[1..n] of T)
    var minp: nat
    for i:= 1 to n-1 do
        minp:= min_pos_from(a,i)
        swap(a,i,minp)
    od
end proc

fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
    minp:= i
    for j:= i+1 to n do if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
    od
end fun
```

Ejemplo: número de comparaciones de la ordenación por selección

$$
\begin{aligned}
\text{ops(selection\_sort(a))} &= \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-1}} \text{ops(min\_pos\_from(a,i))} \\
&= \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-1}} \sum_{\text{j=i+1}}^{\text{n}} \text{ops(a[j]} < \text{a[minp])} \\
&= \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-1}} \sum_{\text{j=i+1}}^{\text{n}} 1 \\
&= \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-1}} \text{(n-i)} \\
&= \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-1}} \text{i} \\
&= \frac{\text{n*(n-1)}}{2} \\
&= \frac{\text{n}^2}{2} - \frac{\text{n}}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo: número de intercambios de la ordenación por selección

$$
\begin{aligned}
\text{ops(selection\_sort(a))} &= \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-1}} \text{ops(swap(a,i,minp))} \\
&= \sum_{\text{i=1}}^{\text{n-1}} 1 \\
&= \text{n-1}
\end{aligned}
$$

Conclusión del ejemplo

- Número de comparaciones de la ordenación por selección: $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$
- Número de intercambios de la ordenación por selección: n-1
- Esto significa que la operación de **intercambio no es representativa** del comportamiento de la ordenación por selección, ya que el número de comparaciones crece más que proporcionalmente respecto a los intercambios.
- Por otro lado, pudimos contar las operaciones de manera **exacta**.