

# Algoritmos y Estructuras de Datos II

Ordenación por intercalación y ordenación rápida

18 de marzo de 2013

# Contenidos

- 1 Repaso
  - Algoritmos elementales
  - Ordenación por intercalación
  - Análisis de la ordenación por intercalación
- 2 Análisis de la ordenación por intercalación
  - Peor caso
  - Mejor caso
- 3 Ordenación rápida (quicksort)
  - El algoritmo
  - Análisis
  - Ejemplo

# Generalidades

Toda la información sobre la materia se encuentra en la wiki,  
accesible desde [cs.famaf.unc.edu.ar/wiki](http://cs.famaf.unc.edu.ar/wiki)

## Problema del bibliotecario

*Un bibliotecario tarda un día en ordenar alfabéticamente una biblioteca con 1000 expedientes. ¿Cuánto tardará en ordenar una con 2000 expedientes?*

Respuesta apurada: dos días.

Respuesta al final de la primera clase: 4 días. (ordenación por selección o por inserción)

Respuesta al final de la clase pasada: 2,2 días. (ordenación por intercalación)

# Ordenación por selección

```
proc selection_sort (in/out a: array[1..n] of T)
  var minp: nat
  for i:= 1 to n-1 do
    minp:= min_pos_from(a,i)
    swap(a,i,minp)
  od
end proc

fun min_pos_from (a: array[1..n] of T, i: nat) ret minp: nat
  minp:= i
  for j:= i+1 to n do if a[j] < a[minp] then minp:= j fi
  od
end fun
```

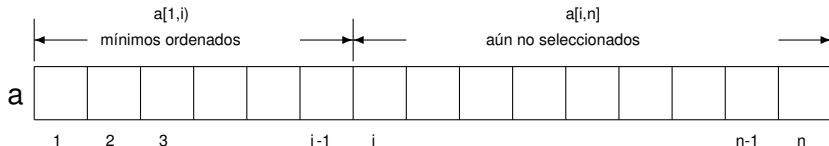
# Ordenación por inserción

```
proc insertion_sort (in/out a: array[1..n] of T)
  for i:= 2 to n do
    insert(a,i)
  od
end proc
```

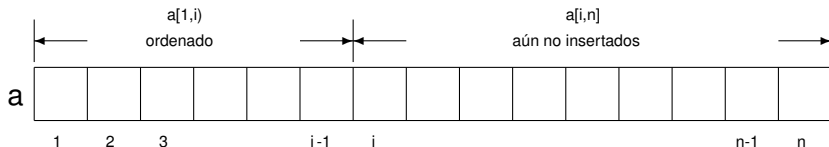
```
proc insert (in/out a: array[1..n] of T, in i: nat)
  var j: nat
  j:= i
  do  $j > 1 \wedge a[j] < a[j - 1]$   $\rightarrow$  swap(a,j-1,j)
    j:= j-1
  od
end proc
```

# Ordenación por selección vs. inserción

selección:



inserción:



# Programa intercalar en Haskell

```
merge :: [T] -> [T] -> [T]
merge [] sts2 = sts2
merge sts1 [] = sts1
merge (t1:sts1) (t2:sts2) = if t1 <= t2
                             then t1:merge sts1 (t2:sts2)
                             else t2:merge (t1:sts1) sts2
```



# Ordenando bloques más pequeños

ordenar <sup>1</sup> bloques de	tardanza
2000 expedientes	4 días
1000 expedientes	2 días y 1 min
500 expedientes	1 día y 2 min
250 expedientes	1/2 día y 3 min
125 expedientes	1/4 día y 4 min
63 expedientes	1/8 día (1 hora) y 5 min
32 expedientes	1/2 hora y 6 min
16 expedientes	1/4 hora y 7 min
8 expedientes	1/8 hora y 8 min
4 expedientes	1/16 hora (4min) y 9 min
2 expedientes	2 min y 10 min
1 expedientes	1 min y 11 min

<sup>1</sup>usando ordenación por selección o por inserción

# Ordenación por intercalación en Haskell

```
merge_sort :: [T] → [T]
merge_sort [] = []
merge_sort [t] = [t]
merge_sort ts = merge sts1 sts2
  where
    sts1 = merge_sort ts1
    sts2 = merge_sort ts2
    (ts1,ts2) = split ts
```

```
split :: [T] → ([T],[T])
split ts = (take n ts, drop n ts)
  where n = length ts ÷ 2
```

# Ordenación por intercalación en pseudocódigo

{Pre:  $n \geq \text{der} \geq \text{izq} > 0 \wedge a = A$ }

**proc** merge\_sort\_rec (**in/out** a: **array**[1..n] **of** T, **in** izq,der: **nat**)

**var** med: **nat**

**if** der > izq  $\rightarrow$  med:= (der+izq)  $\div$  2

    merge\_sort\_rec(a,izq,med)

    {a[izq,med] permutación ordenada de A[izq,med]}

    merge\_sort\_rec(a,med+1,der)

    {a[med+1,der] permutación ordenada de A[med+1,der]}

    merge(a,izq,med,der)

    {a[izq,der] permutación ordenada de A[izq,der]}

**fi**

**end proc**

{Post: a permutación de A  $\wedge$  a[izq,der] permutación ordenada de A[izq,der]}

# Algoritmo principal

```
proc merge_sort (in/out a: array[1..n] of T)  
    merge_sort_rec(a,1,n)  
end proc
```

# Intercalación en pseudocódigo

```

proc merge (in/out a: array[1..n] of T, in izq,med,der: nat)
  var tmp: array[1..n] of T
    j,k: nat
  for i:= izq to med do tmp[i]:=a[i] od
  j:= izq
  k:= med+1
  for i:= izq to der do
    if  $j \leq \text{med} \wedge (k > \text{der} \vee \text{tmp}[j] \leq a[k])$  then a[i]:= tmp[j]
      j:=j+1
    else a[i]:= a[k]
      k:=k+1
    fi
  od
end proc

```

## Orden del algoritmo

- Dijimos que es del orden de  $n \log_2 n$ .
- $1000 * \log_2 1000 = 1000 * 10 = 10000$  comparaciones  
= 1 día.
- $2000 * \log_2 2000 = 2000 * 11 = 22000$  comparaciones  
= 2,2 días.
- Esto fue lo que dijimos, hoy vamos a ver por qué.

# Análisis de algoritmos

- casos
  - peor caso (determina una garantía de comportamiento)
  - promedio (determina el comportamiento en la práctica)
  - mejor (determina una posibilidad)
- operación elemental (constante y representativa)
- imprecisión (constantes multiplicativas y términos despreciables se ignoran)

# Número de comparaciones

- El algoritmo `merge_sort(a)` llama a `merge_sort_rec(a,1,n)`.
- Por lo tanto, para contar las comparaciones de `merge_sort(a)`, debemos contar las de `merge_sort_rec(a,1,n)`.
- Pero `merge_sort_rec(a,1,n)` llama a `merge_sort_rec(a,1,⌊(n+1)/2⌋)` y a `merge_sort_rec(a,⌈(n+1)/2⌉,n)`.
- Por lo tanto, hay que contar las comparaciones de estas llamadas ...



# Solución

- Sea  $t(m)$  = número de comparaciones que realiza `merge_sort_rec(a,izq,der)` **en el peor caso** cuando desde `izq` hasta `der` hay  $m$  celdas.
- El número de celdas desde `izq` hasta `der` es  $der + 1 - izq$ , o sea,  $m = der + 1 - izq$ .
- Si  $m = 0$ ,  $izq = der + 1$ , la condición del **if** es falsa,  $t(m) = 0$ .
- Si  $m = 1$ ,  $izq = der$ , la condición del **if** es falsa,  $t(m) = 0$ .
- Si  $m > 1$ ,  $izq > der$  y la condición del **if** es verdadera.
  - $t(m)$  en este caso, es el número de comparaciones de las dos llamadas recursivas (peor caso), más el número de comparaciones de la intercalación en el peor caso.
  - $t(m) = t(\lceil m/2 \rceil) + t(\lfloor m/2 \rfloor) + m - 1$

# $t(m)$ es creciente

- Veamos que para todo  $m$ ,  $t(m) \leq t(m + 1)$ .
- Caso base:  $t(0) = 0 = t(1)$
- Caso base:  
 $t(1) = 0 < 1 = 0 + 0 + 1 = t(1) + t(1) + 1 = t(2)$
- Caso inductivo
  - Asumimos  $\forall n < m, t(n) \leq t(n + 1)$ .
  - Asumimos  $m \geq 2$
  -

$$\begin{aligned}
 t(m) &= t(\lceil m/2 \rceil) + t(\lfloor m/2 \rfloor) + m - 1 \\
 &< t(\lceil (m+1)/2 \rceil) + t(\lfloor (m+1)/2 \rfloor) + m + 1 - 1 \\
 &= t(m+1)
 \end{aligned}$$

## Solución (potencias de 2)

- Sea  $m = 2^k$ , con  $k > 1$



$$\begin{aligned}
 t(2^k) &= t(\lceil 2^k/2 \rceil) + t(\lfloor 2^k/2 \rfloor) + 2^k - 1 \\
 &= t(2^{k-1}) + t(2^{k-1}) + 2^k - 1 \\
 &< 2 * t(2^{k-1}) + 2^k
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \frac{t(2^k)}{2^k} &< \frac{2 * t(2^{k-1}) + 2^k}{2^k} \\
 &= \frac{2 * t(2^{k-1})}{2^k} + \frac{2^k}{2^k} \\
 &= \frac{t(2^{k-1})}{2^{k-1}} + 1
 \end{aligned}$$

## Solución (potencias de 2)

- Esto vale para todo  $k$ :



$$\begin{aligned}
 \frac{t(2^k)}{2^k} &< \frac{t(2^{k-1})}{2^{k-1}} + 1 \\
 &< \frac{t(2^{k-2})}{2^{k-2}} + 1 + 1 \\
 &= \frac{t(2^{k-2})}{2^{k-2}} + 2 \\
 &< \frac{t(2^{k-3})}{2^{k-3}} + 3 \\
 &\dots \\
 &< \frac{t(2^0)}{2^0} + k \\
 &= t(1) + k \\
 &= k
 \end{aligned}$$

- Entonces  $t(2^k) < 2^k * k$ .
- Entonces  $t(m) < m * \log_2 m$  para  $m$  potencia de 2.

## Cuando no es potencia de 2

Si  $m$  no es potencia de 2, sea  $k$  tal que  $2^k \leq m < 2^{k+1}$  y por lo tanto  $k \leq \log_2 m < k + 1$ .

$$\begin{aligned}
 t(m) &< t(2^{k+1}) \\
 &< 2^{k+1} * (k + 1) \\
 &= 2^{k+1} * k + 2^{k+1} \\
 &\leq 2^{k+1} * k + 2^{k+1} * k \\
 &= 2 * 2^{k+1} * k \\
 &= 4 * 2^k * k \\
 &\leq 4 * m * \log_2 m
 \end{aligned}$$

por ser  $t$  creciente  
 por ser  $2^{k+1}$  potencia de 2  
 por distributividad  
 por  $k \geq 1$   
 por suma  
 por multiplicación  
 por  $2^k \leq m$  y  $k \leq \log_2 m$

# Repasemos

- Definimos

$$t(m) = \begin{cases} 0 & m \in \{0, 1\} \\ t(\lceil m/2 \rceil) + t(\lfloor m/2 \rfloor) + m - 1 & m > 1 \end{cases}$$

- De  $t(2^k) < 2 * t(2^{k-1}) + 2^k$  obtuvimos  $t(m) < 4 * m * \log_2 m$ .
- Podemos ver que  $t(2^k) > 2 * t(2^{k-1}) + 2^{k-1}$  y de eso obtener  $t(m) > \frac{1}{8} * m * \log_2 m$  para todo  $m$ .
- Por lo tanto, ordenación por intercalación es del orden de  $n * \log_2 n$ .

# Mejor caso

- Ahora  $t(m)$  = número de comparaciones que realiza `merge_sort_rec(a,izq,der)` **en el mejor caso** cuando desde `izq` hasta `der` hay  $m$  celdas.
- Obtenemos

$$t(m) = \begin{cases} 0 & m \in \{0, 1\} \\ t(\lceil m/2 \rceil) + t(\lfloor m/2 \rfloor) + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor & m > 1 \end{cases}$$

- Como antes,  $t(m)$  es no decreciente.
- Podemos ver que  $t(2^k) = 2 * t(2^{k-1}) + 2^{k-1}$  y de eso obtener  $t(m) = \frac{1}{8} * m * \log_2 m$  para todo  $m$ .
- Por lo tanto, ordenación por intercalación es del orden de  $n * \log_2 n$ .

# Lo que acabamos de afirmar

- Sea  $m = 2^k$ , con  $k > 1$



$$\begin{aligned} t(2^k) &= t(\lceil 2^k/2 \rceil) + t(\lfloor 2^k/2 \rfloor) + \lfloor 2^k/2 \rfloor \\ &= 2 * t(2^{k-1}) + 2^{k-1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{t(2^k)}{2^k} &= \frac{2 * t(2^{k-1}) + 2^{k-1}}{2^k} \\ &= \frac{2 * t(2^{k-1})}{2^k} + \frac{2^{k-1}}{2^k} \\ &= \frac{t(2^{k-1})}{2^{k-1}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



# Lo que acabamos de afirmar

- Esto vale para todo  $k$ :



$$\begin{aligned}
 \frac{t(2^k)}{2^k} &= \frac{t(2^{k-1})}{2^{k-1}} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{t(2^{k-2})}{2^{k-2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{t(2^{k-2})}{2^{k-2}} + 1 \\
 &= \frac{t(2^{k-3})}{2^{k-3}} + \frac{3}{2} \\
 &\dots \\
 &= \frac{t(2^0)}{2^0} + \frac{k}{2} \\
 &= t(1) + \frac{k}{2} \\
 &= \frac{k}{2}
 \end{aligned}$$

- Entonces  $t(2^k) = 2^k * \frac{k}{2}$ .
- Entonces  $t(m) = \frac{1}{2}m * \log_2 m$  para  $m$  potencia de 2.

# Lo que acabamos de afirmar

Si  $m$  no es potencia de 2, sea  $k$  tal que  $2^k \leq m < 2^{k+1}$  y por lo tanto  $k \leq \log_2 m < k + 1$ .

$$\begin{aligned}
 t(m) &\geq t(2^k) && \text{por ser } t \text{ creciente} \\
 &= \frac{1}{2} 2^k * k && \text{por ser } 2^k \text{ potencia de 2} \\
 &= \frac{1}{8} 4 * 2^k * k \\
 &= \frac{1}{8} 2 * 2^{k+1} * k \\
 &= \frac{1}{8} (2^{k+1} * k + 2^{k+1} * k) \\
 &> \frac{1}{8} (2^{k+1} * k + 2^{k+1}) \\
 &= \frac{1}{8} 2^{k+1} * (k + 1) \\
 &> \frac{1}{8} m * \log_2 m
 \end{aligned}$$

# Conclusión

- El número de comparaciones de la ordenación por intercalación en el peor caso es, a lo sumo, del orden de  $m * \log_2 m$ .
- El número de comparaciones de la ordenación por intercalación en el mejor caso es, como mínimo, del orden de  $m * \log_2 m$ .
- Entonces: el número de comparaciones de la ordenación por intercalación es siempre del orden  $m * \log_2 m$ .

# Ayuda de Miguel

- La clase pasada pregunté qué ayuda podía darle Miguel al bibliotecario.
- Ustedes respondieron:
  - Hacer intercambios mientras el bibliotecario selecciona el menor.
  - Seleccionar el mayor mientras el bibliotecario selecciona el mayor.
  - Ordenar una mitad mientras el bibliotecario ordena la otra y luego intercalan (ordenación por intercalación).
  - Separar en mitades: la mitad de los menores la ordena Miguel mientras la mitad de los mayores la ordena el bibliotecario (ordenación rápida).
- Ahora veremos la ordenación rápida.

# Ordenación rápida en Haskell

```
qsort :: [T] → [T]
qsort [] = []
qsort [a] = [a]
qsort (a:as) = let (xs,ys) = (filter (<a) as, filter (>a) as)
                in qsort xs ++ [a] ++ qsort ys
```

# Ordenación rápida en pseudocódigo

```

{Pre:  $0 \leq \text{der} \leq n \wedge 1 \leq \text{izq} \leq n+1 \wedge \text{izq}-1 \leq \text{der} \wedge a = A$ }
proc quick_sort_rec (in/out a: array[1..n] of T, in izq,der: nat)
  var piv: nat
  if der > izq  $\rightarrow$  pivot(a,izq,der,piv)
    izq  $\leq$  piv  $\leq$  der
    elementos en a[izq,piv-1] < ó = que a[piv]
    elementos en a[piv+1,der] > a[piv]}
    quick_sort_rec(a,izq,piv-1)
    quick_sort_rec(a,piv+1,der)
  fi
end proc
{Post: a permutación de A  $\wedge$  a[izq,der] permutación ordenada de A[izq,der]}

```

# Algoritmo principal

```
proc quick_sort (in/out a: array[1..n] of T)  
    quick_sort_rec(a,1,n)  
end proc
```

## Procedimiento pivot

```

proc pivot (in/out a: array[1..n] of elem, in izq, der: nat, out piv: nat)
    var i,j: nat
    piv:= izq
    i:= izq+1
    j:= der
    do i ≤ j → if a[i] ≤ a[piv] → i:= i+1
                a[j] > a[piv] → j:= j-1
                a[i] > a[piv] ∧ a[j] ≤ a[piv] → swap(a,i,j)
                                                i:= i+1
                                                j:= j-1
                fi
    od
    swap(a,piv,j) {dejando el pivote en una posición más central}
    piv:= j      {señalando la nueva posición del pivote}
end proc
    
```



# Pre, post e invariante

- {Pre:  $1 \leq \text{izq} < \text{der} \leq n \wedge a = A$ }
- {Post:  $a[1, \text{izq}] = A[1, \text{izq}] \wedge a(\text{der}, n] = A(\text{der}, n]$   
 $\wedge a[\text{izq}, \text{der}]$  permutación de  $A[\text{izq}, \text{der}]$   
 $\wedge \text{izq} \leq \text{piv} \leq \text{der}$   
 $\wedge$  los elementos de  $a[\text{izq}, \text{piv}]$  son  $\leq$  que  $a[\text{piv}]$   
 $\wedge$  los elementos de  $a(\text{piv}, \text{der}]$  son  $>$  que  $a[\text{piv}]$ }
- {Inv:  $\{\text{piv} < i \leq j+1 \wedge$  todos los elementos en  $a[\text{izq}, i)$  son  $\leq$  que  $a[\text{piv}]\}$   $\{\wedge$  todos los elementos en  $a(j, \text{der}]$  son  $>$  que  $a[\text{piv}]\}$ }

# Análisis de la ordenación rápida

- La estructura del algoritmo es muy similar a la de la ordenación por intercalación:
  - ambos tienen un procedimiento principal que llama al recursivo con idénticos parámetros,
  - en ambos el procedimiento recursivo es **if der > izq then**,
  - en ambos después del **then** hay dos llamadas recursivas
- pero difieren en que
  - en el primer caso están primero las llamadas y luego intercalar (que es del orden de  $n$ )
  - en el otro, primero se llama a pivot (que se verá que es orden de  $n$ ) y luego las llamadas recursivas
  - en el primero el fragmento de arreglo se parte al medio, en el segundo puede ocurrir particiones menos equilibradas
- es interesante observar que los procedimientos intercalar y pivot son del orden de  $n$ .

## El procedimiento pivot es del orden de $n$

- Sea  $n$  el número de celdas en la llamada a pivot (es decir, der+1-izq),
- el ciclo **do** se repite a lo sumo  $n - 1$  veces, ya que en cada caso la brecha entre  $i$  y  $j$  se acorta en uno o dos
- en cada ejecución del ciclo se realiza un número constante de comparaciones,
- por lo tanto su orden es  $n$ .

## Orden de la ordenación rápida

- Se parece a la ordenación por intercalación incluso después del **then**:
  - ambos realizan dos llamadas recursivas y una operación, diferente, pero en ambos casos del orden de  $n$
- Por ello, esencialmente el mismo análisis se aplica,
- siempre y cuando el procedimiento pivot parta el arreglo al medio.
- Conclusión: en ese caso la ordenación rápida es entonces del orden de  $n * \log_2 n$ .

# Casos

- caso medio: el algoritmo en la práctica es del orden de  $n \log_2 n$
- peor caso: cuando el arreglo ya está ordenado, o se encuentra en el orden inverso, es del orden de  $n^2$
- mejor caso: es del orden de  $n \log_2 n$ , cuando el procedimiento parte exactamente al medio.

## Ejemplo

	5	4	8	2	6	3	1	7
	5	4	8	2	6	3	1	7
	5	4	8	2	6	3	1	7
	5	4	8	2	6	3	1	7
	5	4	1	2	6	3	8	7
	5	4	1	2	6	3	8	7
	5	4	1	2	3	6	8	7
	3	4	1	2	5	6	8	7
	3	4	1	2	5	6	8	7
	3	4	1	2	5	6	8	7
	3	2	1	4	5	6	8	7
	3	2	1	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7

## Ejemplo

	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	8	7
	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7	8