

# Algoritmos y Estructuras de Datos II

Notación  $\mathcal{O}$

19 de marzo de 2013

# Contenidos

- 1 Repaso
  - Algoritmos elementales
  - Algoritmos eficientes
  - Comparación
  
- 2 Notación  $\mathcal{O}$ 
  - $\mathcal{O}$ ,  $\Omega$  y  $\Theta$
  - Propiedades
  - Jerarquía de funciones

# Generalidades

Toda la información sobre la materia se encuentra en la wiki,  
accesible desde [cs.famaf.unc.edu.ar/wiki](http://cs.famaf.unc.edu.ar/wiki)

## Problema del bibliotecario

*Un bibliotecario tarda un día en ordenar alfabéticamente una biblioteca con 1000 expedientes. ¿Cuánto tardará en ordenar una con 2000 expedientes?*

Respuesta apurada: dos días.

Respuesta al final de la primera clase: 4 días. (ordenación por selección o por inserción)

Respuesta al final de la segunda y tercera clases: 2,2 días. (ordenación por intercalación y ordenación rápida)

## Ordenación por selección

- Fijada la longitud  $n$  del arreglo, siempre hace el mismo número de comparaciones y de intercambios,
- hace del orden de  $n^2$  comparaciones,
- hace del orden de  $n$  intercambios.
- Se dice que es cuadrático.

# Ordenación por inserción

- Fijada la longitud  $n$  del arreglo, el número de comparaciones e intercambios depende de la entrada,
- hace a lo sumo del orden de  $n^2$  comparaciones,
- hace a lo sumo del orden de  $n^2$  intercambios,
- hace como mínimo del orden de  $n$  comparaciones.
- Se dice que es cuadrático.

# Ordenación por intercalación

- Fijada la longitud  $n$  del arreglo, el número de comparaciones e intercambios depende de la entrada, pero no su orden,
- hace a lo sumo del orden de  $n \log_2 n$  comparaciones,
- hace como mínimo del orden de  $n \log_2 n$  comparaciones.
- Entonces hace siempre del orden de  $n \log_2 n$  comparaciones.
- No está basado en intercambios (no usa el procedimiento swap, usa un arreglo adicional).
- Usa del orden de  $n$  memoria adicional.

# Ordenación rápida

- Fijada la longitud  $n$  del arreglo, el número de comparaciones e intercambios depende de la entrada, también su orden,
- hace a lo sumo del orden de  $n^2$  comparaciones,
- hace como mínimo del orden de  $n \log_2 n$  comparaciones,
- en caso de entrada aleatoria, hace del orden de  $n \log_2 n$  comparaciones.



# Tabla comparativa

$n$	$n^2$	$n \log_2 n$
10	100	30
20	400	80
50	2.500	300
100	10.000	700
1.000	1.000.000	10.000
2.000	4.000.000	22.000
10.000	100.000.000	130.000
60.000	3.600.000.000	1.000.000

Conclusión: si el bibliotecario demora 1 día en ordenar 1000 expedientes con el algoritmo de ordenación por selección, entonces demora también 1 día en ordenar 60.000 expedientes con el de ordenación por intercalación. ¡Con ordenación por selección, 60.000 expedientes requiere 10 años!

# Notación $\mathcal{O}$

Queremos notación para frases como

- $t(n)$  es a lo sumo del orden de  $n^2$ .
- $t(n)$  es como mínimo del orden de  $n^2$ .
- $t(n)$  es del orden de  $n^2$ .

## Idea

## Definir

- $\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid f(n) \text{ es a lo sumo del orden de } g(n)\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid f(n) \text{ es como mínimo del orden de } g(n)\}$
- $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid f(n) \text{ es del orden de } g(n)\}$

Asumiremos que las funciones involucradas son *casi siempre* no negativas.

Definición:  $g(n)$  es **casi siempre** no negativa si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n \geq n_0. g(n) \geq 0.$$

Esto lo escribimos también así:  $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. g(n) \geq 0$ , y leemos “para casi todo  $n \in \mathbb{N}. g(n) \geq 0$ .”

Y aún más brevemente así  $g : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0}$

# Definiciones

Sea  $g : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0}$ , definimos

- $\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid f(n) \text{ es a lo sumo del orden de } g(n)\}$
- $\mathcal{O}(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \exists c > 0. \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \leq cg(n)\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid f(n) \text{ es como mínimo del orden de } g(n)\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \exists c > 0. \forall n \in \mathbb{N}. f(n) \geq cg(n)\}$
- $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid f(n) \text{ es del orden de } g(n)\}$
- $\Theta(g(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Vamos a trabajar sobre todo con  $\mathcal{O}$ .

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  sii  $g(n) \in \Omega(f(n))$ .

# Ejemplo

- Sea  $f(n)$  = número de comparaciones de la ordenación por selección,
- comprobemos que  $f(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$  es del orden de  $n^2$ ,
- es decir, que  $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ :
- Tomamos  $c = 1$ , para cada  $n \geq 0$  vale:

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n^2 = cn^2$$

- por lo tanto  $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ .

# Observaciones

- si  $g : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0}$ , entonces  $g(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
- demostración: tomar  $c = 1$ .
- si  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  y  $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$ , entonces  $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$ .
- demostración: sea  $c_1$  tal que  $\forall^{\infty} n \in \mathbb{N}. f(n) \leq c_1 g(n)$ , y sea  $c_2$  tal que  $\forall^{\infty} n \in \mathbb{N}. g(n) \leq c_2 h(n)$ , tomar  $c = c_1 c_2$  que satisface  $f(n) \leq c h(n)$  para casi todo  $n \in \mathbb{N}$ .  
¿Para cuáles  $n$  vale esto?
- Conclusión: “ser a lo sumo del orden de” es una relación reflexiva y transitiva.

# Pero no es simétrica

## Ejemplos

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$  pero  $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$
- demostración: con  $c = 1$  se tiene  $n \leq c * n^2$ .  
Pero si existiera  $c$  tal que  $n^2 \leq c * n$  para casi todo  $n$ , entonces simplificando queda  $n \leq c$ , esto es imposible porque  $c$  es constante.

# Tampoco es antisimétrica

## Ejemplos

- $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$  y  $n^2 \in \mathcal{O}(3n^2)$  pero  $n^2 \neq 3n^2$ .
- demostración: con  $c = 3$  se tiene  $3n^2 \leq c * n^2$ . Y con  $c = 1$  se tiene  $n^2 \leq c * 3n^2$ .
- $n^2 \neq 3n^2$  es evidente.



# Constantes multiplicativas no afectan

- Si  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  y  $d_1, d_2 > 0$ , entonces  $d_1 f(n) \in \mathcal{O}(d_2 g(n))$ .
- demostración: sea  $c$  tal que  $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(n) \leq c g(n)$ , entonces

$$d_1 f(n) \leq d_1 c g(n) = \frac{d_1 c}{d_2} d_2 g(n)$$

para casi todo  $n$ .

- Ejemplos: por reflexividad sabemos que  $n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$ . Entonces
  - $4n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$ ,
  - $n^2 \in \mathcal{O}(3n^2)$ ,
  - $\frac{3}{4}n^2 \in \mathcal{O}(\frac{5\pi}{8}n^2)$ , etc.

# Términos despreciables no afectan

- Si  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  entonces  $g(n) + f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ .
- demostración: sea  $c$  tal que  $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(n) \leq cg(n)$ , entonces

$$g(n) + f(n) \leq g(n) + cg(n) = (1 + c)g(n)$$

para casi todo  $n$ .

- Ejemplo,  $n \in \mathcal{O}(n^2)$ , entonces  $n^2 + n \in \mathcal{O}(n^2)$ .

# Inclusión de conjuntos $\mathcal{O}$ s

- $g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \iff \mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(h(n))$
- demostración:  $\Rightarrow$ ) por transitividad.  $\Leftarrow$ ) por reflexividad.
- Ejemplos:
  - $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$
  - $\mathcal{O}(n^2) \not\subseteq \mathcal{O}(n)$
  - $\mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n^2)$ , significa que el orden de crecimiento de  $n$  es estrictamente menor al de  $n^2$ , un algoritmo de orden  $n$  es más eficiente que uno de orden  $n^2$ .
- Más ejemplos:
  - $\mathcal{O}(3n^2) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$
  - $\mathcal{O}(n^2) \subseteq \mathcal{O}(3n^2)$
  - $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(3n^2)$ , significa que el orden de crecimiento  $n^2$  y el de  $3n^2$  es el mismo, un algoritmo de orden  $n^2$  y otro de orden  $3n^2$  son equivalentes (la diferencia puede deberse a la elección de la operación elemental).

# Inclusión de conjuntos $\mathcal{O}$ s

La inclusión de conjuntos  $\mathcal{O}$ s expresa:

- $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ : que el orden de crecimiento  $f(n)$  es menor o igual al de  $g(n)$ ,
- $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$ : que el orden de crecimiento  $f(n)$  es menor estricto al de  $g(n)$ ,
- $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$ : que el orden de crecimiento  $f(n)$  es igual al de  $g(n)$ .
- se usa esta notación para clasificar funciones según sus órdenes de crecimiento.

# La base del logaritmo no afecta

- Sean  $a, b > 1$ ,  $\mathcal{O}(\log_a n) = \mathcal{O}(\log_b n)$ .
- demostración:
  - por definición del logaritmo,  $n = b^{\log_b n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  positivo.
  - Aplicando la función  $\log_a$  en ambos miembros,  $\log_a n = \log_a b \log_b n$ .
  - Luego,  $\log_a b$  es la constante (positiva por  $a, b > 1$ ) que prueba que
  - $\log_a n \in \mathcal{O}(\log_b n)$ . Igual para  $\log_b n \in \mathcal{O}(\log_a n)$ .

# Regla del límite

Sean  $f, g \in \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0}$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  existe, entonces:

- si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$ ,
- si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ , entonces  $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$ ,
- si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ , entonces  $\mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(f(n))$ .

# Demostración de la regla del límite

## Primer inciso

- Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = l \in \mathbb{R}^+$ .
- Demostraremos primero que  $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ .
- que equivale a  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ .
- Sea  $\varepsilon \in \mathcal{R}^+$ ,
- $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. \frac{f(n)}{g(n)} - l < \varepsilon$ ,
- luego  $f(n) < (\varepsilon + l)g(n)$ ,
- por lo tanto  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  y  $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ .
- Como  $l \neq 0$  ( $l > 0$ ), también vale  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1/l \in \mathbb{R}^+$ .
- Luego  $\mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(f(n))$  y  $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$ .

# Demostración de la regla del límite

## Segundo inciso

- Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ .
- La prueba anterior, hasta obtener  $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$  sigue funcionando si  $l = 0$ .
- Falta demostrar que  $\mathcal{O}(g(n)) \not\subseteq \mathcal{O}(f(n))$ .
- Por reducción al absurdo.
  - Sea  $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ ,
  - existe una constante  $c \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\forall^\infty n \in \mathbb{N}, g(n) \leq cf(n)$ .
  - entonces  $\forall^\infty n \in \mathbb{N}, \frac{f(n)}{g(n)} \geq \frac{1}{c} > 0$ ,
  - entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \geq \frac{1}{c} > 0$ .
  - Contradice el primer punto.
- Entonces  $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$  y  $\mathcal{O}(g(n)) \not\subseteq \mathcal{O}(f(n))$ .
- Entonces  $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$ .



# Demostración de la regla del límite

Tercer inciso

- Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ .
- Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$ .
- Entonces por el inciso anterior  $\mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(f(n))$ .

# Jerarquía

Corolario de la regla del límite:

- 1  $x < y \Rightarrow \mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(n^y)$ ,
- 2  $x \in \mathbb{R}^+ \wedge a > 1 \Rightarrow \mathcal{O}(\log_a n) \subset \mathcal{O}(n^x)$ ,
- 3  $c > 1 \Rightarrow \mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(c^n)$ .
- 4  $c > d \geq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(c^n)$ .
- 5  $d \geq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(n!)$ .
- 6  $\mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$ .

Ejemplos:

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\log_2 n) = \mathcal{O}(\log_3 n) \subset \mathcal{O}(n^{0.001}) \subset \mathcal{O}(n^{1.5}) \subset \mathcal{O}(n^2) \subset \\ \subset \mathcal{O}(n^5) \subset \mathcal{O}(n^{100}) \subset \mathcal{O}(1.01^n) \subset \mathcal{O}(2^n) \subset \mathcal{O}(100^n) \subset \mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$$

Prueba de  $x < y \Rightarrow \mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(n^y)$ 

- Sea  $x < y$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x}{n^y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{y-x}} = 0$ .
- Entonces  $\mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(n^y)$ .

Prueba de  $x \in \mathbb{R}^+ \wedge a > 1 \Rightarrow \mathcal{O}(\log_a n) \subset \mathcal{O}(n^x)$ 

- Sean  $x \in \mathbb{R}^+$  y  $a > 1$ .
- Por la Regla de L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n \ln a}}{x n^{x-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x n^x \ln a} = 0$$

- Entonces  $\mathcal{O}(\log_a n) \subset \mathcal{O}(n^x)$ .

Prueba de  $c > 1 \Rightarrow \mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(c^n)$ 

- Sean  $c > 1$  y  $x \in \mathbb{R}$ .
- Demostraremos que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$ .
  - caso base:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^0}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} = 0$ .
  - paso inductivo, asumimos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$ ,
  - por la Regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k+1}}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+1)n^k}{c^n \ln c} = \frac{k+1}{\ln c} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$$

- Por lo tanto, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$ .
- Por lo tanto, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{O}(n^k) \subset \mathcal{O}(c^n)$ .
- Ahora sea  $k$  tal que  $x \leq k$ .
- $\mathcal{O}(n^x) \subseteq \mathcal{O}(n^k) \subset \mathcal{O}(c^n)$ .

Prueba de  $c > d \geq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(c^n)$ 

- Sean  $c > d \geq 0$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{d^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{d}\right)^n = +\infty$ , ya que  $\frac{c}{d} > 1$ .
- Entonces  $\mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(c^n)$ .

Prueba de  $d \geq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(n!)$ 

- Sea  $d \geq 0$ .
- Sea  $c > d$ .
- Para todo  $n \geq 2c^2$ .

$$n! \geq n(n-1) \dots (n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq c^{2 \lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq c^n$$

- Luego  $\mathcal{O}(c^n) \subseteq \mathcal{O}(n!)$ .
- Luego  $\mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(c^n) \subseteq \mathcal{O}(n!)$ .

Prueba de  $\mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$ .

- Para todo  $n \geq 2$

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} * \frac{2 * \dots * n}{n * \dots * n} \leq \frac{1}{n} * \frac{n * \dots * n}{n * \dots * n} = \frac{1}{n}$$

- Luego  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .
- Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$  y  $\mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$ .



# Ejemplos

- Vimos que los términos despreciables no afectan, es decir,
- si  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  entonces  $g(n) + f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ .
- Dimos el ejemplo  $n^2 + n \in \mathcal{O}(n^2)$ .
- Es fácil comprobar (tomar  $c = 1$ ) que  $n^2 \in \mathcal{O}(n^2 + n)$ .
- Luego  $\mathcal{O}(n^2 + n) = \mathcal{O}(n^2)$ .
- ¿Qué pasa con  $n^2 - n$ ?
- También queremos ver que no afectan:  $\mathcal{O}(n^2 - n) = \mathcal{O}(n^2)$ .
- Es difícil enunciar, ya que en general  $f(n) - g(n)$  puede ser negativo por más que  $f(n)$  y  $g(n)$  no lo sean.

# Términos despreciables no afectan

## Parte 2

- Sean  $f, g : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0}$ .
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$ , entonces
  - $f(n) - g(n) : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0}$  y
  - $\mathcal{O}(f(n) - g(n)) = \mathcal{O}(f(n))$ .
- Demostración:
  - Para casi todo  $n$ ,  $\frac{g(n)}{f(n)} < \frac{1}{2}$ , es decir  $g(n) < \frac{1}{2}f(n)$ ,
  - entonces  $\frac{1}{2}f(n) = f(n) - \frac{1}{2}f(n) < f(n) - g(n)$ ,
  - entonces  $f(n) - g(n) : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^{\geq 0}$ .
  - Y  $\frac{1}{2}f(n) < f(n) - g(n) \leq f(n)$ ,
  - entonces  $\mathcal{O}(f(n) - g(n)) = \mathcal{O}(f(n))$ .
- Ejemplos
  - $\mathcal{O}(n^2 - n) = \mathcal{O}(n^2)$
  - $\mathcal{O}(n - \log_2 n) = \mathcal{O}(n)$ .

# Términos despreciables no afectan

## Polinomio

- Si  $a_k > 0$ , entonces  $\mathcal{O}(a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0) = \mathcal{O}(n^k)$ .
- Salvo el primero, los demás coeficientes pueden ser positivos, negativos o nulos.
- Ejemplo, el número de comparaciones de la ordenación por selección:  $\mathcal{O}(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}) = \mathcal{O}(n^2)$ .

# Multiplicación y división por funciones

- El  $\mathcal{O}$  se preserva por multiplicación y división.
- Sea  $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(n) > 0$ . Entonces
  - $\mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(h(n)) \iff \mathcal{O}(f(n)g(n)) \subseteq \mathcal{O}(f(n)h(n))$
- Demostración: para casi todo  $n$ 
  - $g(n) \leq ch(n) \iff f(n)g(n) \leq cf(n)h(n)$
- Ejemplos:
  - $\mathcal{O}(n \log n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$ .
  - $\mathcal{O}(n \log n) \subseteq \mathcal{O}(n^{1.001})$ .
- Corolario:  
 $\mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(h(n)) \iff \mathcal{O}(f(n)g(n)) \subset \mathcal{O}(f(n)h(n))$
- Ejemplos:
  - $\mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^2)$ .
  - $\mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^{1.001})$ .

# Composición de funciones

- El  $\mathcal{O}$  se preserva por composición.
- Si  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty$ , entonces  $f(h(n)) \in \mathcal{O}(g(h(n)))$ .
- Demostración:
  - Sea  $c \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(n) \leq cg(n)$ ,
  - sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty$ , por lo tanto a partir de cierto  $n$ ,  $h(n)$  es suficientemente grande.
  - Para esos  $n$ ,  $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(h(n)) \leq cg(h(n))$ .
- Ejemplos:
  - Como  $n^{1/2} \in \mathcal{O}(n)$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n = \infty$ ,  
 $\sqrt{\log n} = \log^{1/2} n \in \mathcal{O}(\log n)$ .
  - Como  $n \in \mathcal{O}(n^2)$ , entonces  $\log n \in \mathcal{O}(\log^2 n)$ .