Algoritmos y Estructuras de Datos II

Notación $\mathcal{O}$

25 de marzo de 2015

Contenidos

Algoritmos de ordenación vistos

- por selección: siempre del orden de n^2 comparaciones y n intercambios.
- por inserción: del orden de n^2 comparaciones y n^2 intercambios en el peor caso y en el caso medio (del orden de n comparaciones y ningún intercambio en el mejor caso).
- por intercalación: siempre del orden de $n * \log_2 n$ comparaciones (no usa intercambios, del orden de $n * \log_2 n$ asignaciones).
- ordenación rápida: del orden de n^2 comparaciones y n^2 intercambios en el peor caso, pero del orden de $n * \log_2 n$ comparaciones e intercambios en la práctica.

Tabla comparativa

n	n^2	$n * \log_2 n$
10	100	30
20	400	80
50	2.500	300
100	10.000	700
1.000	1.000.000	10.000
2.000	4.000.000	22.000
10.000	100.000.000	130.000
60.000	3.600.000.000	1.000.000

Conclusión: si el bibliotecario demora 1 día en ordenar 1000 expedientes con el algoritmo de ordenación por selección, entonces demora también 1 día en ordenar 60.000 expedientes con el de ordenación por intercalación. ¡Con ordenación por selección, 60.000 expedientes requeriría 10 años!

Notación $\mathcal{O}$

Llamemos

- $t(n)$ = número de comparaciones del algoritmo de ordenación por selección,
- $s(n)$ = número de comparaciones del algoritmo de ordenación por inserción.

Queremos notación para frases como

- $s(n)$ es a lo sumo del orden de n^2.
- $s(n)$ es como mínimo del orden de n.
- $t(n)$ es del orden de n^2.

Idea

Definiremos

- $\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid f(n)$ es a lo sumo del orden de $g(n)\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid f(n)$ es como mínimo del orden de $g(n)\}$
- $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid f(n)$ es del orden de $g(n)\}$

Con esas definiciones, lograremos escribirlas así:

- $s(n)$ es a lo sumo del orden de n^2, se escribirá $s(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.
- $s(n)$ es como mínimo del orden de n, se escribirá $s(n) \in \Omega(n)$.
- $t(n)$ es del orden de n^2, se escribirá $t(n) \in \Theta(n^2)$.

Algunas convenciones antes de la definición formal

- Trabajaremos con funciones que toman valores reales: $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Nos interesa por ejemplo la función $\log_2 n$.
- Asumiremos que las funciones involucradas son *casi siempre* no negativas. Es decir, que son no negativos salvo quizá en una cantidad finita de números naturales.
- Definición: $g(n)$ es **casi siempre** no negativa si $\exists n_0 \in \mathbb{N}. \forall n \geq n_0. g(n) \geq 0$.
- Esto lo escribimos también así: $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. g(n) \geq 0$,
- y leemos "para casi todo $n \in \mathbb{N}. g(n) \geq 0$."
- Y aún más brevemente, escribimos $g : \mathbb{N} \stackrel{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0}$

Y ahora sí la definición formal

Sea $g : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0}$, definimos

- $\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid f(n)$ es a lo sumo del orden de $g(n)\}$
- $\mathcal{O}(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \exists c > 0.\ \forall^{\infty} n \in \mathbb{N}. f(n) \leq c g(n)\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid f(n)$ es como mínimo del orden de $g(n)\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \exists c > 0.\ \forall^{\infty} n \in \mathbb{N}. f(n) \geq c g(n)\}$
- $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid f(n)$ es del orden de $g(n)\}$
- $\Theta(g(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Vamos a trabajar sobre todo con $\mathcal{O}$.

- $f(n) \in \Omega(g(n))$ sii $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ sii $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \land g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$.

Observar que $\mathcal{O}(g(n))$, $\Omega(g(n))$ y $\Theta(g(n))$ son **conjuntos de funciones.**

Ejemplo

- Sea $t(n) =$ número de comparaciones de la ordenación por selección,
- comprobemos que $t(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$ es del orden de n^2,
- es decir, que $t(n) \in \Theta(n^2) = \mathcal{O}(n^2) \cap \Omega(n^2)$,
- primero, entonces, que $t(n) \in \mathcal{O}(n^2) = \{f : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \exists c > 0.\ \forall^{\infty} n \in \mathbb{N}. f(n) \leq c n^2\}$,
- o sea, que $\exists c > 0.\ \forall^{\infty} n \in \mathbb{N}. t(n) \leq c n^2$
- o sea, que $\exists c > 0.\ \forall^{\infty} n \in \mathbb{N}. \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \leq c n^2$
- Tomamos $c = 1$, para cada $n \geq 0$ vale:

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \leq \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = n^2 = c n^2$$

- por lo tanto $t(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.

Ejemplo
Continuación

- Veamos ahora que $t(n) \in \Omega(n^2) = \{f : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \exists c > 0.\ \forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(n) \geq c n^2\}$,
- o sea, que $\exists c > 0.\ \forall^\infty n \in \mathbb{N}. t(n) \geq c n^2$
- o sea, que $\exists c > 0.\ \forall^\infty n \in \mathbb{N}. \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \geq c n^2$
- Tomamos $c = \frac{1}{4}$, para cada $n \geq 2$ vale:

$$n - 2 \geq 0 \overset{(+n)}{\Longleftrightarrow} 2n - 2 \geq n \overset{(*\frac{n}{4})}{\Longleftrightarrow} \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \geq \frac{n^2}{4} = c n^2$$

- por lo tanto $t(n) \in \Omega(n^2)$.

Conclusión: $t(n) \in \Theta(n^2)$.

$\mathcal{O}$, Ω y Θ determinan relaciones entre funciones

- $\ldots \in \mathcal{O}(\ldots)$ es una relación entre funciones:
  "ser del $\mathcal{O}$ de" o "ser a lo sumo del orden de"
  o "ser del orden de"
- $\ldots \in \Omega(\ldots)$ es una relación entre funciones:
  "ser del Ω de ..." o "ser como mínimo del orden de"
  o "ser del orden de"
- $\ldots \in \Theta(\ldots)$ es una relación entre funciones:
  "ser del Θ de ..." o "ser exactamente del orden de"
  o "ser del orden de"

Observar que "ser del orden de" se usa para las tres (hmff).
A continuación estudiaremos algunas propiedades de la primera de estas relaciones. De ellas se deducen también propiedades para las otras dos.

Observaciones: es una relación reflexiva

- si $g : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0}$, entonces $g(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
- demostración: tomar $c = 1$.

Conclusión: la relación "$\ldots \in \mathcal{O}(\ldots)$" es reflexiva.

Observaciones: es una relación transitiva

- si $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ y $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, entonces $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$.
- demostración: sea c_1 tal que $\forall^\infty n \in \mathbb{N}.f(n) \leq c_1 g(n)$, y sea c_2 tal que $\forall^\infty n \in \mathbb{N}.g(n) \leq c_2 h(n)$, tomar $c = c_1 c_2$ que satisface $f(n) \leq c h(n)$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$.
  ¿Para cuáles n vale esto?

Conclusión: la relación "$\ldots \in \mathcal{O}(\ldots)$" es transitiva.

Conclusión

- "ser a lo sumo del orden de" es una relación reflexiva y transitiva.
- las otras dos relaciones también son reflexivas y transitivas.

Pero no es simétrica

Ejemplo

- $n \in \mathcal{O}(n^2)$ pero $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$
- demostración: con $c = 1$ se tiene $n \leq c * n^2$.
  Pero si existiera c tal que $n^2 \leq c * n$ **para casi todo** n, entonces simplificando queda $n \leq c$, esto es imposible porque c es constante.

- $\ldots \in \Omega(\ldots)$ tampoco es simétrica,
- pero $\ldots \in \Theta(\ldots)$ sí lo es:

$$\begin{aligned} f(n) \in \Theta(g(n)) \quad &\Leftrightarrow \quad f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n)) \\ &\Leftrightarrow \quad g(n) \in \Omega(f(n)) \wedge g(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \\ &\Leftrightarrow \quad g(n) \in \Theta(f(n)) \end{aligned}$$

Tampoco es antisimétrica

Ejemplos

- $3n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$ y $n^2 \in \mathcal{O}(3n^2)$ pero $n^2 \neq 3n^2$.
- demostración: con $c = 3$ se tiene $3n^2 \leq c * n^2$. Y con $c = 1$ se tiene $n^2 \leq c * 3n^2$.
- $n^2 \neq 3n^2$ es evidente.
- (Aunque sí se da que $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(3n^2)$).
- $\ldots \in \Omega(\ldots)$ y $\ldots \in \Theta(\ldots)$ tampoco son antisimétricas.

Constantes multiplicativas no afectan

- Si $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ y $d_1, d_2 > 0$, entonces $d_1 f(n) \in \mathcal{O}(d_2 g(n))$.
- demostración: sea c tal que $\forall^\infty n \in \mathbb{N}.\ f(n) \leq c g(n)$, entonces
$$d_1 f(n) \leq d_1 c g(n) = \frac{d_1 c}{d_2} d_2 g(n)$$
para casi todo n.
- Ejemplos: por reflexividad sabemos que $n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$. Entonces
  - $4n^2 \in \mathcal{O}(n^2)$,
  - $n^2 \in \mathcal{O}(3n^2)$,
  - $\frac{3}{4}n^2 \in \mathcal{O}(\frac{5\pi}{8}n^2)$, etc.
- Idénticas propiedades valen para $\ldots \in \Omega(\ldots)$ y $\ldots \in \Theta(\ldots)$.

Términos despreciables no afectan

- Si $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ entonces $g(n) + f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$.
- demostración: sea c tal que $\forall^{\infty} n \in \mathbb{N}.\ f(n) \leq c g(n)$, entonces

$$g(n) + f(n) \leq g(n) + c g(n) = (1 + c) g(n)$$

  para casi todo n.
- Ejemplo, $n \in \mathcal{O}(n^2)$, entonces $n^2 + n \in \mathcal{O}(n^2)$.

- Idénticas propiedades valen para $\ldots \in \Omega(\ldots)$ y $\ldots \in \Theta(\ldots)$.

Inclusión de conjuntos $\mathcal{O}$s

- $g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) \iff \mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(h(n))$
- demostración: $\Rightarrow$) por transitividad. $\Leftarrow$) por reflexividad.
- Ejemplos:
  - $\mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$
  - $\mathcal{O}(n^2) \not\subseteq \mathcal{O}(n)$
  - $\mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n^2)$, significa que el orden de crecimiento de n es estrictamente menor al de n^2, un algoritmo de orden n es más eficiente que uno de orden n^2.
- Más ejemplos:
  - $\mathcal{O}(3n^2) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$
  - $\mathcal{O}(n^2) \subseteq \mathcal{O}(3n^2)$
  - $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(3n^2)$, significa que el orden de crecimiento n^2 y el de $3n^2$ es el mismo, un algoritmo de orden n^2 y otro de orden $3n^2$ son equivalentes (la diferencia puede deberse a la elección de la operación elemental).

Inclusión de conjuntos $\mathcal{O}$s

La inclusión de conjuntos $\mathcal{O}$s expresa:

- $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$: que el orden de crecimiento $f(n)$ es menor o igual al de $g(n)$,
- $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$: que el orden de crecimiento $f(n)$ es menor estricto al de $g(n)$,
- $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$: que el orden de crecimiento $f(n)$ es igual al de $g(n)$.
- se usa esta notación para clasificar funciones según sus órdenes de crecimiento.

Otras maneras equivalentes de expresarlas

Esas 3 posibilidades pueden expresarse de muchas maneras, entre ellas:

- $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$: $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, $g(n) \in \Omega(f(n))$ y $\Omega(g(n)) \subseteq \Omega(f(n))$,
- $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$: $\{f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))\}$, $\Omega(g(n)) \subset \Omega(f(n))$, $\{g(n) \in \Omega(f(n)) \wedge f(n) \notin \Omega(g(n))\}$, $\{f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) \notin \Omega(g(n))\}$, $\{g(n) \in \Omega(f(n)) \wedge g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))\}$,
- $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$: $\{f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) \in \mathcal{O}(f(n))\}$, $\Omega(g(n)) = \Omega(f(n))$, $\{g(n) \in \Omega(f(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))\}$, $\{f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))\}$, $\{g(n) \in \Omega(f(n)) \wedge g(n) \in \mathcal{O}(f(n))\}$, $f(n) \in \Theta(g(n))$, $g(n) \in \Theta(f(n))$, $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$, $\Theta(f(n)) \subseteq \Theta(g(n))$, $\Theta(g(n)) \subseteq \Theta(f(n))$, etc.

La base del logaritmo no afecta

- Sean $a, b > 1$, $\mathcal{O}(\log_a n) = \mathcal{O}(\log_b n)$.
- demostración:
  - por definición del logaritmo, $n = b^{\log_b n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ positivo.
  - Aplicando la función $\log_a$ en ambos miembros, $\log_a n = \log_a b \, \log_b n$.
  - Luego, $\log_a b$ es la constante (positiva por $a, b > 1$) que prueba que
  - $\log_a n \in \mathcal{O}(\log_b n)$. Igual para $\log_b n \in \mathcal{O}(\log_a n)$.

Regla del límite

Sean $f, g \in \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0}$, si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ existe, entonces:

- si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+$, entonces $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$,
- si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, entonces $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$,
- si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, entonces $\mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(f(n))$.

Demostración de la regla del límite

Primer inciso

- Sea $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = l \in \mathbb{R}^+$.
- Demostraremos primero que $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$.
- que equivale a $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$.
- Sea $\varepsilon \in \mathcal{R}^+$,
- $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. \frac{f(n)}{g(n)} - l < \varepsilon$,
- luego $f(n) < (\varepsilon + l)g(n)$,
- por lo tanto $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ y $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$.
- Como $l \neq 0$ ($l > 0$), también vale $\lim_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = 1/l \in \mathbb{R}^+$.
- Luego, con idéntico razonamiento $\mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(f(n))$.
- Conclusión: $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$.

Demostración de la regla del límite

Segundo inciso

- Sea $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- La prueba anterior, hasta obtener $\mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ sigue funcionando si $l = 0$.
- Falta demostrar que $\mathcal{O}(g(n)) \not\subseteq \mathcal{O}(f(n))$.
- Por reducción al absurdo.
    - Sea $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$,
    - existe una constante $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall^\infty n \in \mathbb{N}, g(n) \leq cf(n)$.
    - entonces $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. \frac{f(n)}{g(n)} \geq \frac{1}{c} > 0$,
    - entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \geq \frac{1}{c} > 0$.
    - Contradice el primer punto.
- Entonces $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$ y $\mathcal{O}(g(n)) \not\subseteq \mathcal{O}(f(n))$.
- Conclusión: $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$.

Demostración de la regla del límite

Tercer inciso

- Sea $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = +\infty$.
- Entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = 0$.
- Entonces por el inciso anterior $\mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(f(n))$.

Jerarquía

Corolario de la regla del límite:

1. $x < y \Rightarrow \mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(n^y)$,
2. $x \in \mathbb{R}^+ \wedge a > 1 \Rightarrow \mathcal{O}(\log_a n) \subset \mathcal{O}(n^x)$,
3. $c > 1 \Rightarrow \mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(c^n)$.
4. $c > d \geq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(c^n)$.
5. $d \geq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(n!)$.
6. $\mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$.

Ejemplos:

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\log_2 n) = \mathcal{O}(\log_3 n) \subset \mathcal{O}(n^{0.001}) \subset \mathcal{O}(n^{1.5}) \subset \mathcal{O}(n^2) \subset$$

$$\subset \mathcal{O}(n^5) \subset \mathcal{O}(n^{100}) \subset \mathcal{O}(1.01^n) \subset \mathcal{O}(2^n) \subset \mathcal{O}(100^n) \subset \mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$$

Prueba de $x < y \Rightarrow \mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(n^y)$

- Sea $x < y$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^x}{n^y} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{y-x}} = 0$.
- Entonces $\mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(n^y)$.

Prueba de $x \in \mathbb{R}^+ \wedge a > 1 \Rightarrow \mathcal{O}(\log_a n) \subset \mathcal{O}(n^x)$

- Sean $x \in \mathbb{R}^+$ y $a > 1$.
- Por la Regla de L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \ln a}}{x n^{x-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x n^x \ln a} = 0$$

- Entonces $\mathcal{O}(\log_a n) \subset \mathcal{O}(n^x)$.

Prueba de $c > 1 \Rightarrow \mathcal{O}(n^x) \subset \mathcal{O}(c^n)$

- Sean $c > 1$ y $x \in \mathbb{R}$.
- Demostraremos que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$.
  - caso base: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^0}{c^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^n} = 0$.
  - paso inductivo, asumimos $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$,
  - por la Regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{k+1}}{c^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k}{c^n \ln c} = \frac{k+1}{\ln c} \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$$

- Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$.
- Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}(n^k) \subset \mathcal{O}(c^n)$.
- Ahora sea k tal que $x \leq k$.
- $\mathcal{O}(n^x) \subseteq \mathcal{O}(n^k) \subset \mathcal{O}(c^n)$.

Prueba de $c > d \geq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(c^n)$

- Sean $c > d \geq 0$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{d^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^n = +\infty$, ya que $\frac{c}{d} > 1$.
- Entonces $\mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(c^n)$.

Prueba de $d \geq 0 \Rightarrow \mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(n!)$

- Sea $d \geq 0$.
- Sea $c > d$.
- Para todo $n \geq 2c^2$.

$$n! \geq n(n-1)\ldots(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq c^{2\lceil \frac{n}{2} \rceil} \geq c^n$$

- Luego $\mathcal{O}(c^n) \subseteq \mathcal{O}(n!)$.
- Luego $\mathcal{O}(d^n) \subset \mathcal{O}(c^n) \subseteq \mathcal{O}(n!)$.

Prueba de $\mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$.

- Para todo $n \geq 2$

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} * \frac{2 * \ldots * n}{n * \ldots * n} \leq \frac{1}{n} * \frac{n * \ldots * n}{n * \ldots * n} = \frac{1}{n}$$

- Luego $0 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.
- Entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n}$ y $\mathcal{O}(n!) \subset \mathcal{O}(n^n)$.

Ejemplos

- Vimos que los términos despreciables no afectan, es decir,
- si $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ entonces $g(n) + f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$.
- Dimos el ejemplo $n^2 + n \in \mathcal{O}(n^2)$.
- Es fácil comprobar (tomar c = 1) que $n^2 \in \mathcal{O}(n^2 + n)$.
- Luego $\mathcal{O}(n^2 + n) = \mathcal{O}(n^2)$.
- ¿Qué pasa con $n^2 - n$?
- También queremos ver que no afectan: $\mathcal{O}(n^2 - n) = \mathcal{O}(n^2)$.
- Es difícil enunciar, ya que en general $f(n) - g(n)$ puede ser negativo por más que $f(n)$ y $g(n)$ no lo sean.

Términos despreciables no afectan
Parte 2

- Sean $f, g : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0}$.
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$, entonces
  - $f(n) - g(n) : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0}$ y
  - $\mathcal{O}(f(n) - g(n)) = \mathcal{O}(f(n))$.
- Demostración:
  - Para casi todo n, $\frac{g(n)}{f(n)} < \frac{1}{2}$, es decir $g(n) < \frac{1}{2}f(n)$,
  - entonces $\frac{1}{2}f(n) = f(n) - \frac{1}{2}f(n) < f(n) - g(n)$,
  - entonces $f(n) - g(n) : \mathbb{N} \overset{\infty}{\to} \mathbb{R}^{\geq 0}$.
  - Y $\frac{1}{2}f(n) < f(n) - g(n) \leq f(n)$,
  - entonces $\mathcal{O}(f(n) - g(n)) = \mathcal{O}(f(n))$.
- Ejemplos
  - $\mathcal{O}(n^2 - n) = \mathcal{O}(n^2)$
  - $\mathcal{O}(n - \log_2 n) = \mathcal{O}(n)$.

Términos despreciables no afectan

Polinomio

- Si $a_k > 0$, entonces $\mathcal{O}(a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0) = \mathcal{O}(n^k)$.
- Salvo el primero, los demás coeficientes pueden ser positivos, negativos o nulos.
- Ejemplo, el número de comparaciones de la ordenación por selección: $\mathcal{O}(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}) = \mathcal{O}(n^2)$.

Multiplicación y división por funciones

- El $\mathcal{O}$ se preserva por multiplicación y división.
- Sea $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(n) > 0$. Entonces
  - $\mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(h(n)) \iff \mathcal{O}(f(n)g(n)) \subseteq \mathcal{O}(f(n)h(n))$
- Demostración: para casi todo n
  - $g(n) \leq ch(n) \iff f(n)g(n) \leq cf(n)h(n)$
- Ejemplos:
  - $\mathcal{O}(n \log n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$.
  - $\mathcal{O}(n \log n) \subseteq \mathcal{O}(n^{1.001})$.
- Corolario:
  $\mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(h(n)) \iff \mathcal{O}(f(n)g(n)) \subset \mathcal{O}(f(n)h(n))$
- Ejemplos:
  - $\mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^2)$.
  - $\mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^{1.001})$.

Composición de funciones

- El $\mathcal{O}$ se preserva por composición.
- Si $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ y $\lim_{n\to\infty} h(n) = \infty$, entonces $f(h(n)) \in \mathcal{O}(g(h(n)))$.
- Demostración:
  - Sea $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(n) \leq c g(n)$,
  - sea $\lim_{n\to\infty} h(n) = \infty$, por lo tanto a partir de cierto n, $h(n)$ es suficientemente grande.
  - Para esos n, $\forall^\infty n \in \mathbb{N}. f(h(n)) \leq c g(h(n))$.
- Ejemplos:
  - Como $n^{1/2} \in \mathcal{O}(n)$ y $\lim_{n\to\infty} \log n = \infty$, $\sqrt{\log n} = \log^{1/2} n \in \mathcal{O}(\log n)$.
  - Como $n \in \mathcal{O}(n^2)$, entonces $\log n \in \mathcal{O}(\log^2 n)$.