Algoritmos y Estructuras de Datos II

Jerarquía de funciones

23 de marzo de 2016

Contenidos

Análisis de algunos algoritmos

- Ordenación por selección es del orden de n^2.
- Ordenación por inserción es del orden de n^2 (peor caso y caso medio).
- Ordenación por intercalación es del orden de $n \log_2 n$.
- Ordenación rápida es del orden de $n \log_2 n$ (caso medio).
- Búsqueda lineal es del orden de n.
- Búsqueda binaria es del orden de $\log_2 n$.

¿Cómo comparar los órdenes de los algoritmos?

- Hay funciones que crecen más rápido que otras (cuando n tiende a $+\infty$).
- Escribiremos $f(n) \sqsubset g(n)$ para decir que $g(n)$ crece más rápido que $f(n)$. Por ejemplo:
  - $n \log_2 n \sqsubset n^2$.
  - $\log_2 n \sqsubset n$.
- Escribiremos $f(n) \approx g(n)$ para decir que $f(n)$ y $g(n)$ crecen al mismo ritmo. Por ejemplo:
  - $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \approx n^2$.
  - $45n^2 \approx n^2$.

Algunas condiciones

- No nos interesan las constantes multiplicativas:
  - $\frac{1}{4}n^2 \approx n^2$
  - $4n^3 \approx n^3$
  - $1000 \log n \approx \log n$
  - $\pi n \approx n$
- No nos interesan los términos menos significativos, que crecen más lento:
  - $n^2 + n \approx n^2$
  - $n^3 + n^2 \log_2 n \approx n^3$
  - $\log n + 3456 \approx \log n$
  - $n + \sqrt{n} \approx n$

¿Cómo comparar funciones según su crecimiento?

- Regla del límite. Sean $f(n)$ y $g(n)$ tales que
  - $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} g(n) = \infty$, y
  - $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ existe.

  Entonces
  - si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, entonces $f(n) \sqsubset g(n)$.
  - si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$, entonces $g(n) \sqsubset f(n)$.
  - caso contrario (el límite es un número real positivo), $f(n) \approx g(n)$.

Jerarquía

$$1 \sqsubset \log_2 n \approx \log_3 n \sqsubset n^{0.001} \sqsubset n^{1.5} \sqsubset n^2 \sqsubset$$

$$\sqsubset n^5 \sqsubset n^{100} \sqsubset 1.01^n \sqsubset 2^n \sqsubset 100^n \sqsubset$$

$$\sqsubset 10000^n \sqsubset n! \sqsubset n^n$$

Propiedades

- Constantes multiplicativas no afectan.
- Términos de crecimiento despreciable no afectan.
- Sean $a, b > 1$, $\log_a n \approx \log_b n$.
- Sea $f(n) > 0$ para "casi todo $n \in \mathbb{N}$". Entonces:
  - $g(n) \sqsubset h(n) \iff f(n)g(n) \sqsubset f(n)h(n)$.
  - $g(n) \approx h(n) \iff f(n)g(n) \approx f(n)h(n)$.
- Sea $\lim_{n\to\infty} h(n) = \infty$. Entonces:
  - $f(n) \sqsubset g(n) \implies f(h(n)) \sqsubset g(h(n))$.
  - $f(n) \approx g(n) \implies f(h(n)) \approx g(h(n))$.

Jerarquía

$$1 \sqsubset \log(\log(\log n)) \sqsubset \log(\log n) \sqsubset \log n \sqsubset n^{0.001} \sqsubset$$

$$\sqsubset n \sqsubset n \log n \sqsubset n^{1.001} \sqsubset n^{100} \sqsubset 1.01^{n} \sqsubset$$

$$\sqsubset n^{100} * 1.01^{n} \sqsubset 1.02^{n} \sqsubset 100^{n} \sqsubset 10000^{n} \sqsubset$$

$$\sqsubset (n-1)! \sqsubset n! \sqsubset (n+1)! \sqsubset n^{n}$$