

Algoritmos y Estructuras de Datos II

Tipos Abstractos de Datos (TADs o ADTs en ingles)

7 de abril de 2014

Clase de hoy

- 1 Repaso
 - Tipos concretos versus abstractos
 - Tipos abstractos de datos
- 2 Tipos abstractos de datos (TADs)
- 3 Paréntesis balanceados
 - TAD contador
 - Especificación del TAD contador
 - Sobre la especificación
 - Resolviendo el problema
- 4 Generalización de paréntesis balanceados
 - TAD pila
 - Especificación del TAD pila
 - Resolviendo el problema

Repaso

- cómo vs. qué
- 3 partes
 - 1 análisis de algoritmos
 - algoritmos de ordenación
 - operación elemental
 - conteo
 - notación \mathcal{O} , Ω y Θ .
 - propiedades y jerarquía
 - resolución de recurrencias
 - 2 tipos de datos
 - tipos concretos: arreglos, listas, tuplas, punteros.
 - tipos abstractos
 - 3 técnicas de resolución de problemas

Tipos de datos

Conceptualmente distinguimos dos clases de tipos de datos:

- Tipos de datos **concretos**:
 - son provistos por el lenguaje de programación,
 - concepto **dependiente** del lenguaje de programación,
 - enteros, char, string, booleanos, arreglos, reales,
- Tipos de datos **abstractos**:
 - **surgen de analizar el problema** a resolver,
 - concepto **independiente** del lenguaje de programación,
 - eventualmente se implementará utilizando tipos concretos,
 - eso da lugar a una **implementación** o **representación** del tipo abstracto
 - ejemplo: al desarrollar una aplicación para un gps que calcule ciertos caminos óptimos, surgirá considerar un grafo donde las aristas son segmentos de rutas.

Tipos abstractos de datos (TADs)

- Identificarlos es una tarea **siempre recompensada**.
 - mayor entendimiento cabal del problema a resolver,
 - algoritmos en un lenguaje comprensible por el ser humano,
 - permite poner a prueba (a través de prototipos) tempranamente si la solución está bien encaminada,
 - facilita el diseño, la organización del trabajo de programación y el trabajo en equipo,
 - proporciona una solución independiente de la representación,
 - da lugar a mejores soluciones: programas más elegantes, más legibles, más breves, más eficientes, más mantenibles, más fáciles de reutilizar, más factiblemente libre de errores.
- Ejemplificaremos a través de una serie de problemas, cada uno de ellos dará lugar a un tipo abstracto.

Tipos abstractos de datos (TADs)

- Surgen de analizar el problema a resolver.
- Plantearemos un problema.
- Lo analizaremos.
- Obtendremos un TAD.

Paréntesis balanceados

- Problema:
 - Dar un algoritmo que tome una expresión,
 - dada, por ejemplo, por un arreglo de caracteres,
 - y devuelva verdadero si la expresión tiene sus paréntesis correctamente balanceados,
 - y falso en caso contrario.

Solución conocida

- Recorrer el arreglo de izquierda a derecha,
- utilizando un entero **inicializado en 0**,
- **incrementarlo** cada vez que se encuentra un paréntesis que abre,
- **decrementarlo** (comprobando previamente que no sea nulo en cuyo caso **no están balanceados**) cada vez que se encuentra un paréntesis que cierra,
- Al finalizar, **comprobar** que dicho entero sea cero.
- ¿Es necesario que sea un entero?

Contador

- No hace falta un entero (susceptible de numerosas operaciones aritméticas),
- sólo se necesita **algo** con lo que se pueda
 - inicializar
 - incrementar
 - comprobar si su valor es el inicial
 - decrementar si no lo es
- Llamaremos a ese **algo**, **contador**
- Necesitamos un contador.

TAD contador

- El contador se define por lo que sabemos de él: sus cuatro operaciones
 - inicializar
 - incrementar
 - comprobar si su valor es el inicial
 - decrementar si no lo es
- Notamos que las operaciones **inicializar** e **incrementar** son capaces de generar todos los valores posibles del contador,
- **comprobar** en cambio solamente examina el contador,
- **decrementar** no genera más valores que los obtenibles por **inicializar** e **incrementar**
- A las operaciones **inicializar** e **incrementar** se las llama **constructores**

Especificación del TAD contador

TAD contador

constructores

inicial : contador

incrementar : contador \rightarrow contador

operaciones

es_inicial : contador \rightarrow booleano

decrementar : contador \rightarrow contador

{se aplica sólo a un contador que no sea inicial}

ecuaciones

es_inicial(inicial) = verdadero

es_inicial(incrementar(c)) = falso

decrementar(incrementar(c)) = c

Explicación

Los valores posibles del contador están expresados por

- inicial
- incrementar(inicial)
- incrementar(incrementar(inicial))
- incrementar(incrementar(incrementar(inicial)))
- incrementar(incrementar(incrementar(incrementar(inicial))))
- etcétera, es una lista infinita, pero cada uno tiene una cantidad finita de veces el constructor **incrementar** aplicado al constructor **inicial**

Intuitivamente

Intuitivamente estos valores se corresponden con números naturales:

- inicial $\rightarrow 0$
- incrementar(inicial) $\rightarrow 1$
- incrementar(incrementar(inicial)) $\rightarrow 2$
- incrementar(incrementar(incrementar(inicial))) $\rightarrow 3$
- incrementar(incrementar(incrementar(incrementar(inicial))))
 $\rightarrow 4$
- etcétera,
- es interesante observar que los números naturales parecen más adecuados que los enteros, a pesar de que nuestra primera solución era con enteros.

Intuitivamente

Tal vez una intuición más interesante es que cada **incrementar** corresponde a agregar “una marquita” y cada **decrementar**, a borrarla:

- inicial \longrightarrow
- incrementar(inicial) $\longrightarrow |$
- incrementar(incrementar(inicial)) $\longrightarrow ||$
- incrementar(incrementar(incrementar(inicial))) $\longrightarrow |||$
- incrementar(incrementar(incrementar(incrementar(inicial))))
 $\longrightarrow ||||$
- etcétera,

Formalismo

Pero éstas son sólo intuiciones, formalmente los valores están expresados como dijimos antes, por

- inicial
- incrementar(inicial)
- incrementar(incrementar(inicial))
- incrementar(incrementar(incrementar(inicial)))
- incrementar(incrementar(incrementar(incrementar(inicial))))
- etcétera

Operaciones que no son constructores

- Observar que la operación **es_inicial** examina si su argumento es el primero de esta lista o no,
- y que la operación **decrementar** aplicado a cualquiera de esta lista (salvo el primero), devuelve el que se encuentra inmediatamente arriba
- no construyen valores nuevos,
- las operaciones **es_inicial** y **decrementar** no son constructores.

Operación `es_inicial`

Esta operación está definida por las ecuaciones

`es_inicial` : contador \rightarrow booleano

`es_inicial`(inicial) = verdadero

`es_inicial`(incrementar(c)) = falso

Ejemplos:

- `es_inicial`(inicial) = verdadero
- `es_inicial`(incrementar(inicial)) = falso
- `es_inicial`(incrementar(incrementar(inicial))) = falso
- `es_inicial`(incrementar(incrementar(incrementar(inicial)))) = falso
- etcétera

Operación decrementar

Esta operación está definida por las ecuaciones

decrementar : contador \rightarrow contador

{se aplica sólo a un contador que no sea inicial}

decrementar(incrementar(c)) = c

Ejemplos:

- decrementar(inicial) no satisface la pre-condición.
- decrementar(incrementar(inicial)) = inicial
- decrementar(incrementar(incrementar(inicial))) = incrementar(inicial)
- decrementar(incrementar(incrementar(incrementar(inicial)))) = incrementar(incrementar(inicial))

Sobre la especificación

- Los **constructores** (en este caso **inicial** e **incrementar**) deben ser capaces de generar todos los valores posibles del TAD.
- En lo posible cada valor debe poder generarse de manera única.
- Esto se cumple para inicial e incrementar: partiendo de cero y tras sucesivos incrementos se puede alcanzar cualquier valor posible; y hay una única forma de alcanzar cada valor posible de esa manera.
- Las demás operaciones se listan bajo el título **Operaciones**.

Sobre las ecuaciones

- Las operaciones que no son constructores, deben definirse por ecuaciones
- Las ecuaciones deben considerar todos los casos posibles que satisfagan la precondition
- Ejemplo, las ecuaciones para la operación **es_inicial** considera los únicos dos casos posibles,
- Ejemplo, la ecuación para la operación **decrementar** considera el único caso posible.

Resolviendo el problema

- A continuación, un algoritmo que resuelve el problema utilizando un contador.
- Asumimos que el TAD contador se implementará bajo el nombre **counter**,
- que habrá un procedimiento llamado **init** que implemente el constructor inicial,
- uno llamado **inc** que implemente el constructor incrementar,
- y uno llamado **dec** que implemente la operación decrementar.
- Habrá también una función **is_init** que implemente la operación **es_inicial**.

Especificación e implementación

- Utilizaremos nombres en castellano para constructores y operaciones especificadas,
- y nombres en inglés para sus implementaciones.
- Vamos a utilizar informalmente la notación $c \sim C$ para indicar que c implementa C .

Especificación e implementación

type counter = ... {- no sabemos aún cómo se implementará -}

proc init (**out** c: counter) {Post: c ~ inicial}

{Pre: c ~ C} **proc** inc (**in/out** c: counter) {Post: c ~ incrementar(C)}

{Pre: c ~ C \wedge \neg is_init(c)}

proc dec (**in/out** c: counter)

{Post: c ~ decrementar(C)}

fun is_init (c: counter) **ret** b: **bool** {Post: b = (c ~ inicial)}

Algoritmo de control de paréntesis balanceados

```

fun matching_parenthesis (a: array[1..n] of char) ret b: bool
  var i: nat
  var c: counter
  b:= true
  init(c)
  i:= 1
  do  $i \leq n \wedge b \rightarrow$  if a[i] = '('  $\rightarrow$  inc(c)
    a[i] = ')'  $\wedge$  is_init(c)  $\rightarrow$  b:= false
    a[i] = ')'  $\wedge$   $\neg$ is_init(c)  $\rightarrow$  dec(c)
  fi
  i:= i+1
od
  b:= b  $\wedge$  is_init(c)
end fun

```


Paréntesis balanceados: comentarios finales

- Luego veremos cómo implementar contadores.
- Condiciones e invariantes fueron omitidos por cuestiones de espacio,
- pero están en los apuntes.

Generalización de paréntesis balanceados

- Problema:
 - Dar un algoritmo que tome una expresión,
 - dada, por ejemplo, por un arreglo de caracteres,
 - y devuelva verdadero si la expresión tiene sus paréntesis, corchetes, llaves, etc. correctamente balanceados,
 - y falso en caso contrario.

Usando contadores

- ¿Alcanza con un contador?
 - “(1+2)”
 - “{1+(18-[4*2])}”
 - “(1+2)”
- ¿Alcanza con tres (o n) contadores?
 - “(1+2)”
 - “(1+[3-1]+4)”

Conclusión

- No alcanza con saber cuántos delimitadores restan cerrar,
- también hay que saber en qué orden deben cerrarse,
- o lo que es igual
- en qué orden se han abierto,
- mejor dicho,
- ¿cuál fue el último que se abrió? (de los que aún no se han cerrado)
- ¿y antes de éste?
- etc.
- Hace falta una “constancia” de cuáles son los delimitadores que quedan abiertos, y en qué orden deben cerrarse.

Solución posible

- Recorrer el arreglo de izquierda a derecha,
- utilizando dicha “constancia” de delimitadores aún abiertos **inicialmente vacía**,
- **agregarle** obligación de cerrar un paréntesis (resp. corchete, llave) cada vez que se encuentra un paréntesis (resp. corchete, llave) que abre,
- **removerle** obligación de cerrar un paréntesis (resp. corchete, llave) (**comprobando** previamente que la constancia no sea vacía y que la **primera** obligación a cumplir sea justamente la de cerrar el paréntesis (resp. corchete, llave)) cada vez que se encuentra un paréntesis (resp. corchete, llave) que cierra,
- Al finalizar, **comprobar** que la constancia está vacía.

Pila

- Hace falta **algo**, una “constancia,” con lo que se pueda
 - inicializar vacía,
 - agregar una obligación de cerrar delimitador,
 - comprobar si quedan obligaciones,
 - examinar la primera obligación,
 - quitar una obligación.
- La última obligación que se agregó, es la primera que debe cumplirse y quitarse de la constancia.
- Esto se llama **pila**.

TAD pila

- La pila se define por lo que sabemos: sus cinco operaciones
 - inicializar en vacía
 - apilar una nueva obligación (o elemento)
 - comprobar si está vacía
 - examinar la primera obligación (si no está vacía)
 - quitarla (si no está vacía).
- Nuevamente las operaciones **inicializar** y **agregar** son capaces de generar todas las pilas posibles,
- **comprobar** y **examinar**, en cambio, solamente examinan la pila,
- **quitarla** no genera más valores que los obtenibles por **inicializar** y **agregar**.

Especificación del TAD pila

TAD pila[elem]

constructores

vacía : pila

apilar : elem \times pila \rightarrow pila

operaciones

es_vacía : pila \rightarrow booleano

primero : pila \rightarrow elem {se aplica sólo a una pila no vacía}

desapilar : pila \rightarrow pila {se aplica sólo a una pila no vacía}

ecuaciones

es_vacía(vacía) = verdadero

es_vacía(apilar(e,p)) = falso

primero(apilar(e,p)) = e

desapilar(apilar(e,p)) = p

Especificación e implementación

type stack = ... {- no sabemos aún cómo se implementará -}

proc empty(**out** p:stack) {Post: p ~ vacia}

{Pre: p ~ P \wedge e ~ E}

proc push(**in** e:elem,**in/out** p:stack)

{Post: p ~ apilar(E,P)}

{Pre: p ~ P \wedge \neg is_empty(p)}

fun top(p:stack) **ret** e:elem

{Post: e ~ primero(P)}

Especificación e implementación

{Pre: $p \sim P \wedge \neg \text{is_empty}(p)$ }

proc pop(**in/out** p:stack)

{Post: $p \sim \text{desapilar}(P)$ }

fun is_empty(p:stack) **ret** b:bool

{Post: $b = (p \sim \text{vacía})$ }

Algoritmo de control de delimitadores balanceados

```

fun matching_delimiters (a: array[1..n] of char) ret b: bool
  var i: nat
  var p: stack of char
  b:= true
  empty(p)
  i:= 1
  do  $i \leq n \wedge b \rightarrow$  if left(a[i])  $\rightarrow$  push(match(a[i]),p)
    right(a[i])  $\wedge$  (is_empty(p)  $\vee$  top(p)  $\neq$  a[i])  $\rightarrow$  b:= false
    right(a[i])  $\wedge$   $\neg$ is_empty(p)  $\wedge$  top(p) = a[i]  $\rightarrow$  pop(p)
    fi
    i:= i+1
  od
  b:= b  $\wedge$  is_empty(p)
end fun

```

Este algoritmo asume, además de la implementación de pila,

- una función **match** tal que $\text{match}('(') = ')'$, $\text{match}('[') = ']'$, $\text{match}('{') = '}'$, etc.
- una función **left**, tal que $\text{left}('(')$, $\text{left}('[')$, $\text{left}('{')$, etc son verdadero, en los restantes casos left devuelve falso.
- una función **right**, tal que $\text{right}(')')$, $\text{right}(']')$, $\text{right}('}')$, etc son verdadero, en los restantes casos, right devuelve falso.