Algoritmos y Estructuras de Datos II

TAD Cola

15 de abril de 2014

Clase de hoy

1. Repaso
2. Otros tipos abstractos de datos (TADs)
3. Buffer de datos entre productor y consumidor
   - Buffer de datos
   - TAD cola
   - Resolviendo el problema
   - Implementaciones de colas

Repaso

- cómo vs. qué
- 3 partes
  1. análisis de algoritmos
     - algoritmos de ordenación
     - notación $\mathcal{O}$, Ω y Θ.
     - propiedades y jerarquía
     - recurrencias (D. y V., homogéneas y no homogéneas)
  2. tipos de datos
     - tipos concretos (arreglos, listas, tuplas, punteros)
     - tipos abstractos (TAD contador, TAD pila)
     - implementación de tipos abstractos: implementaciones elementales.
     - listas enlazadas $\rightarrow$ implementaciones avanzadas
  3. técnicas de resolución de problemas

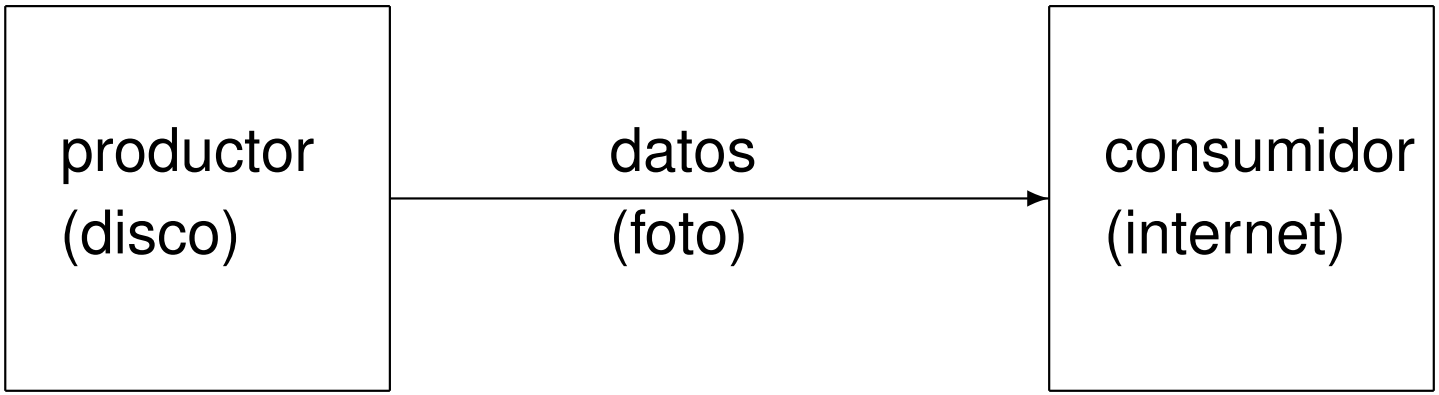
Tipos abstractos de datos (TADs)

- Surgen de analizar el problema a resolver.
- Plantearemos un problema.
- Lo analizaremos.
- Obtendremos un TAD.

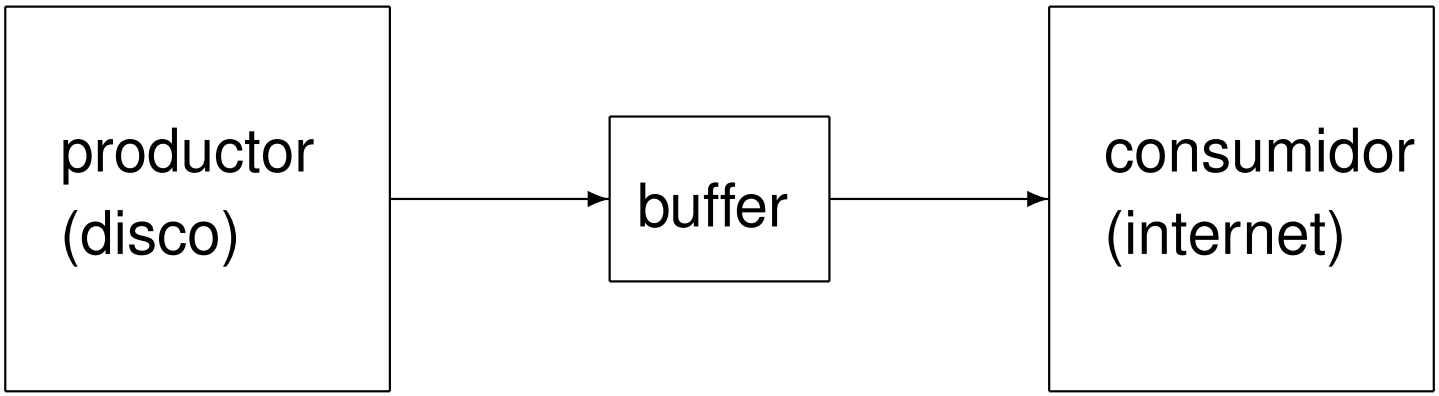
Buffer de datos

- Imaginemos cualquier situación en que ciertos datos deben transferirse desde una unidad a otra,
- por ejemplo, datos (¿una foto?) que se quiere subir a algún sitio de internet desde un disco,
- un agente suministra o produce datos (el disco) y otro que los utiliza o consume (el sitio de internet),
- esta relación se llama **productor-consumidor**
- para amortiguar el impacto por la diferencia de velocidades, se puede introducir un buffer entre ellos,
- un buffer recibe y almacena los datos a medida que se producen y los emite en el mismo orden, a medida que son solicitados.

Gráficamente



se interpone un buffer



Interés

- El programa que realiza la subida de datos puede liberar más rápidamente la lectora del disco.
- El proceso que realizaba la lectura se desocupa antes.
- Se articulan las dos etapas sin necesidad de sincronización.
- El productor se ocupa de lo suyo.
- El consumidor se ocupa de lo suyo.
- El buffer se ocupa de la interacción entre ambos.

Uso del buffer

- La interposición del buffer no debe afectar el orden en que los datos llegan al consumidor.
- El propósito es sólo permitir que el productor y el consumidor puedan funcionar cada uno a su velocidad sin necesidad de sincronización.
- El buffer inicialmente está **vacío**.
- A medida que se van **agregando** datos suministrados por el productor, los mismos van siendo alojados en el buffer.
- Siempre que sea necesario enviar un dato al consumidor, habrá que comprobar que el buffer no se encuentre **vacío** en cuyo caso se enviará el **primero** que llegó al buffer y se lo **eliminará** del mismo.

Cola

- Es **algo**, con lo que se pueda
  - inicializar **vacía**,
  - agregar o **encolar** un dato,
  - comprobar si quedan datos en el buffer, es decir, si **es** o no **vacía**
  - examinar el **primer** dato (el más viejo de los que se encuentran en el buffer),
  - quitar o **decolar** un dato.
- El primer dato que se agregó, es el primero que debe enviarse y quitarse de la **cola**.
- Por eso se llama **cola** o también **cola FIFO** (First-In, First-Out).

Tad cola

- La cola se define por lo que sabemos: sus cinco operaciones
  - inicializar en **vacía**
  - **encolar** un nuevo dato (o elemento)
  - comprobar si **está vacía**
  - examinar el **primer** elemento (si no está vacía)
  - **decolarlo** (si no está vacía).
- Las operaciones **vacía** y **encolar** son capaces de generar todas las colas posibles,
- **está vacía** y **primero**, en cambio, solamente examinan la cola,
- **decolarla** no genera más valores que los obtenibles por **vacía** y **apilar**.

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) = ?
decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = ?
                      | otherwise = ?

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = ?

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = ?
                      | otherwise = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = Vacía
                      | otherwise = ?
```

Especificación del TAD cola

```
module TADCola where

data Cola e = Vacía
            | Encolar (Cola e) e

es_vacía :: Cola e → Bool
primero :: Cola e → e
decolar :: Cola e -> Cola e
- - las dos últimas se aplican sólo a cola no vacía

es_vacía Vacía = True
es_vacía (Encolar q e) = False

primero (Encolar q e) | es_vacía q = e
                      | otherwise = primero q

decolar (Encolar q e) | es_vacía q = Vacía
                      | otherwise = Encolar (decolar q) e
```

Explicación

Los valores posibles de una cola están expresados por

- ningún elemento: Vacía
- un elemento: Encolar Vacía A, Encolar Vacía B, Encolar Vacía C
- dos elementos: Encolar (Encolar Vacía A) B, Encolar(Encolar Vacía A), A . . .
- tres elementos: Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A . . .
- etcétera

Mostrar en Haskell.

Ejemplo

- Gracias a las ecuaciones, podemos comprobar que
- primero (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C) = ?
- decolar (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C) = ?

Ejemplo

- Gracias a las ecuaciones, podemos comprobar que
- primero (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C) = B
- decolar (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C) = Encolar (Encolar (Encolar Vacía A) A) C

En efecto

$$
\begin{aligned}
& \text{primero (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C)} \\
= \; & \text{primero (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A)} \\
= \; & \text{primero (Encolar (Encolar Vacía B) A)} \\
= \; & \text{primero (Encolar Vacía B)} \\
= \; & \text{B}
\end{aligned}
$$

En efecto

$$
\begin{aligned}
& \text{decolar (Encolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A) C)} \\
= \; & \text{Encolar (decolar (Encolar (Encolar (Encolar Vacía B) A) A)) C} \\
= \; & \text{Encolar (Encolar (decolar (Encolar (Encolar Vacía B) A)) A) C} \\
= \; & \text{Encolar (Encolar (Encolar (decolar (Encolar Vacía B)) A) A) C} \\
= \; & \text{Encolar (Encolar (Encolar Vacía A) A) C}
\end{aligned}
$$

Especificación e implementación

type queue = . . . {- no sabemos aún cómo se implementará -}

proc empty(**out** q:queue) {Post: q $\sim$ Vacía}

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge$ e $\sim$ E}
proc enqueue(**in**/**out** q:queue,**in** e:elem)
{Post: q $\sim$ Encolar Q E}

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge\neg$is_empty(q)}
fun first(q:queue) **ret** e:elem
{Post: e $\sim$ primero Q}

Especificación e implementación

{Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
proc dequeue(**in**/**out** q:queue)
{Post: q $\sim$ decolar Q}

fun is_empty(q:queue) **ret** b:**bool**
{Post: b $=$ (q $\sim$ Vacía)}

Algoritmo de transferencia de datos con buffer

```
proc buffer ()
    var d: data
    var q: queue of data
    empty(q)
    produce:= false
    demand:= false
    do forever
        if produce → receive d from producer
                     enqueue(q,d)
                     produce:= false
          demand ∧¬ is_empty(q) → d:= first(q)
                                  send d to consumer
                                  demand:= false
                                  dequeue(q)
        fi
    od
end proc
```

- Hemos asumido que hay dos variables booleanas compartidas:
- produce:
  - variable compartida entre el programa buffer y el productor,
  - el productor le asigna verdadero cuando produce un dato,
  - el programa buffer accede mediante el comando receive.
- demand:
  - variable compartida entre el programa buffer y el consumidor,
  - el consumidor le asigna verdadero cuando espera un dato,
  - el programa buffer se lo envía mediante el comando send.

Utilización

- El TAD cola tiene numerosas aplicaciones.
- Siempre que se quieran atender pedidos, datos, etc. en el orden de llegada.
- Una aplicación interesante es el algoritmo de ordenación llamado Radix Sort.

Implementación

Veremos implementaciones:

- Usando listas (si las listas son tipos concretos)
- Usando arreglos.
- Usando listas enlazadas.

Implementación de colas usando tipo concreto lista

- **type** queue = [elem]
- **proc** empty(**out** q:queue)
  q:= [ ]
  end proc
  {Post: q $\sim$ Vacía}
- {Pre: q $\sim$ Q}
  proc enqueue(**in**/**out** q:queue; **in** e:elem)
  q:= (q $\triangleleft$ e)
  end proc
  {Post: q $\sim$ Encolar Q e}

Implementación de colas usando tipo concreto lista

- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
  fun first(q:queue) **ret** e:elem
  e:= head(q)
  end fun
  {Post: e $\sim$ primero Q}
- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
  proc dequeue(**in**/**out** q:queue)
  q:= tail(q)
  end proc
  {Post: q $\sim$ decolar Q}

Implementación de colas usando tipo concreto lista

- **fun** is_empty(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q = [ ])
  end fun
  {Post: b $=$ (q $\sim$ Vacía)}
- Todas las operaciones son $\mathcal{O}(1)$, salvo enqueue que es $\mathcal{O}(n)$ (lineal) en la longitud de la cola. Pero hay implementaciones del tipo concreto lista que la tornan constante.

Implementación de colas usando arreglos

- **type** queue = **tuple**
  elems: **array**[1..N] **of** elem
  size: **nat**
  end
- **proc** empty(**out** q:queue)
  q.size:= 0
  end proc
  {Post: q $\sim$ Vacía}
- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_full(q)}
  proc enqueue(**in**/**out** q:queue, **in** e:elem)
  q.size:= q.size + 1
  q.elems[q.size]:= e
  end proc
  {Post: q $\sim$ Encolar Q e}

Implementación de colas usando arreglos

- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
  fun first(q:queue) **ret** e:elem
  e:= q.elems[1]
  end fun
  {Post: e $\sim$ primero Q}
- {Pre: q $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(q)}
  proc dequeue(**in**/**out** q:queue)
  q.size:= q.size - 1
  for i:= 1 **to** q.size **do**
  q.elems[i]:= q.elems[i+1]
  od
  end proc
  {Post: q $\sim$ decolar Q}

Implementación de colas usando arreglos

- **fun** is_empty(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q.size = 0)
  end fun
  {Post: b $=$ (q $\sim$ Vacía)}
- **fun** is_full(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q.size = N)
  end fun
- Todas las operaciones son $\mathcal{O}(1)$, salvo dequeue que es lineal.

Implementación eficiente de colas usando arreglos

- **type** queue = **tuple**
  elems: **array**[0..N-1] **of** elem
  fst: **nat**
  size: **nat**
  end
- **proc** empty(**out** q:queue)
  q.fst:= 0
  q.size:= 0
  end proc
- **proc** enqueue(**in**/**out** q:queue, **in** e:elem)
  q.elems[(q.fst + q.size) mod N]:= e
  q.size:= q.size + 1
  end proc

Implementación eficiente de colas usando arreglos

- **fun** first(q:queue) **ret** e:elem
  e:= q.elems[q.fst]
  end fun
- **proc** dequeue(**in**/**out** q:queue)
  q.size:= q.size - 1
  q.fst:= (q.fst + 1) mod N
  end proc
- **fun** is_empty(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q.size = 0)
  end fun
- **fun** is_full(q:queue) **ret** b:**Bool**
  b:= (q.size = N)
  end fun
- Todas las operaciones son $\mathcal{O}(1)$.

Implementación del TAD cola con listas enlazadas

Implementación ingenua

- Reusar lo más posible la del TAD pila,
- **type** queue = **pointer to** node
- donde node se define como para el TAD pila,
- empty, is_empty y destroy como para el TAD pila,
- first como top,
- y dequeue como pop.

Implementación del TAD cola con listas enlazadas

Implementación ingenua

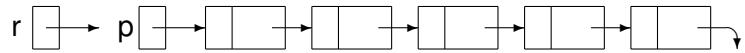
Sólo cambia la implementación de enqueue:

```
{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q,r: pointer to node
    alloc(q)                                   {se reserva espacio para el nuevo nodo}
    q→value:= e                                {se aloja allí el elemento e}
    q→next:= null                              {el nuevo nodo (⋆q) va a ser el último de la cola}
                                               {el nodo ⋆q está listo, debe ir al final de la cola}
    if p = null → p:= q                        {si la cola es vacía con esto alcanza}
      p ≠ null →                               {si no es vacía, se inicia la búsqueda de su último nodo}
                r:= p                          {r realiza la búsqueda a partir del primer nodo}
                while r→next ≠ null do         {mientras ⋆r no sea el último nodo}
                    r:= r→next                 {que r pase a señalar el nodo siguiente}
                od                             {ahora ⋆r es el último nodo}
                r→next:= q                     {que el siguiente del que era último sea ahora ⋆q}
    fi
end proc
{Post: p ∼ encolar(Q,E)}
```

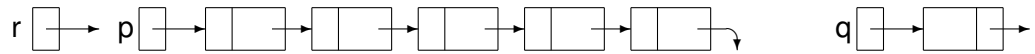
Implementación del TAD cola con listas enlazadas

Implementación ingenua

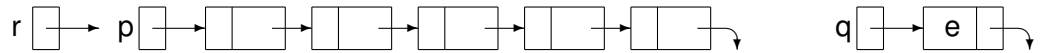
{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(**in**/**out** p:queue,**in** e:elem)
var q,r: **pointer to** node



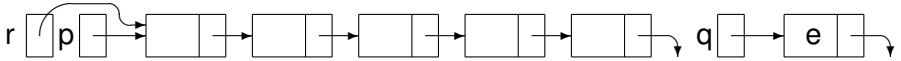
alloc(q)



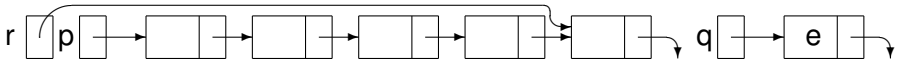
q→value:= e
q→next:= **null**



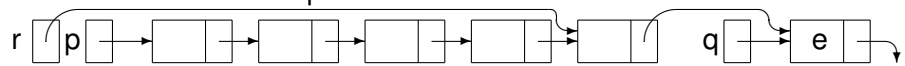
if p = **null** → p:= q {no engañarse con el dibujo, la cola puede ser vacía}
p ≠ **null** → r:= p



while r→next ≠ **null do** {mientras ⋆r no sea el último nodo}
r:= r→next {que r pase a señalar el nodo siguiente}
od



r→next:= q



fi
end proc
{Post: p ∼ encolar(Q,E)}

Encolar (implementación ingenua)

En limpio

```
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q,r: pointer to node
    alloc(q)
    q→value:= e
    q→next:= null
    if p = null → p:= q
       p ≠ null → r:= p
                  while r→next ≠ null do
                      r:= r→next
                  od
                  r→next:= q
    fi
end proc
```

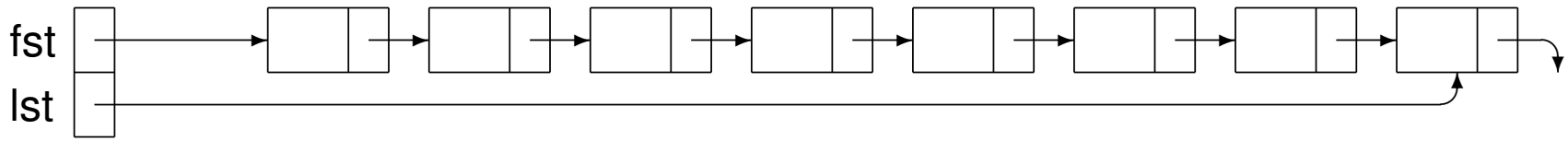
Conclusiones

- Todas las operaciones son constantes,
- salvo enqueue que es lineal,
- ya que debe recorrer toda la lista hasta encontrar el último nodo.
- Hay al menos dos soluciones a este problema:
  - Mantener dos punteros: uno al primero y otro al último,
  - o utilizar listas enlazadas **circulares**.

Implementación del TAD cola con listas enlazadas y dos punteros

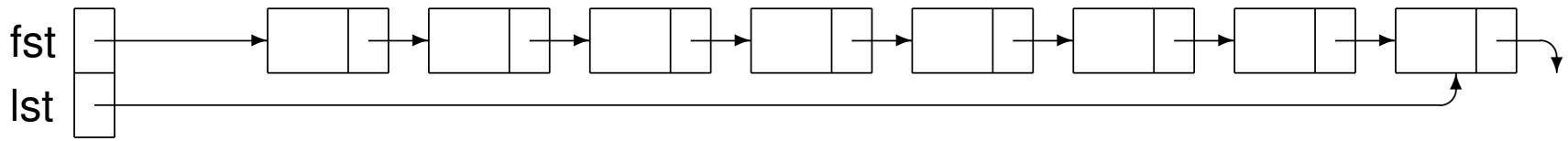
```
type node = tuple
              value: elem
              next: pointer to node
            end
type queue = tuple
               fst: pointer to node
               lst: pointer to node
             end
```

Gráficamente, puede representarse de la siguiente manera



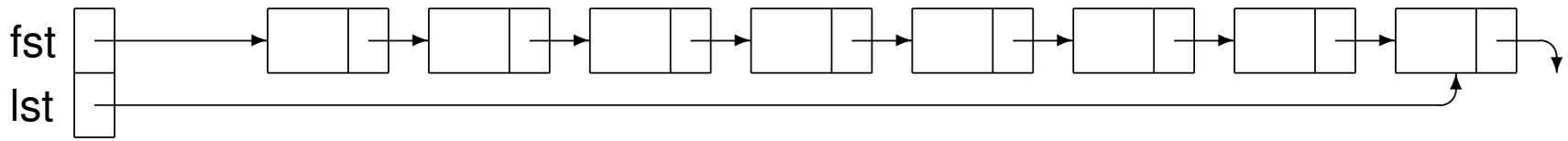
Cola vacía

proc empty(**out** p:queue)
    p.fst:= **null**
    p.lst:= **null**
end proc
{Post: p $\sim$ vacia}



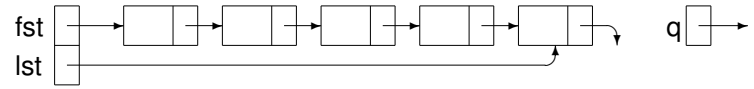
Primer elemento

{Pre: p $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(p)}
fun first(p:queue) **ret** e:elem
    e:= p.fst$\rightarrow$value
end fun
{Post: e $\sim$ primero(Q)}

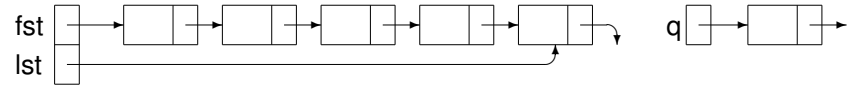


Encolar

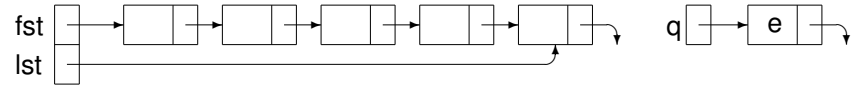
{Pre: p ∼ Q ∧ e ∼ E}
proc enqueue(**in**/**out** p:queue,**in** e:elem)
var q: **pointer to** node



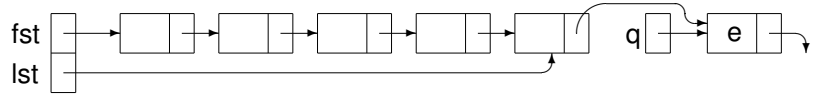
alloc(q)



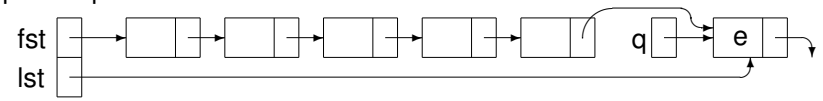
q→value:= e
q→next:= **null**



if p.lst = **null** → p.fst:= q {caso enqueue en cola vacía}
p.lst:= q
p.lst ≠ **null** → p.lst→next:= q



p.lst:= q



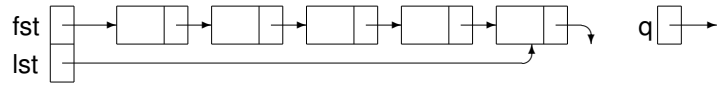
fi
end proc
{Post: p ∼ encolar(Q,E)}

Encolar
En limpio

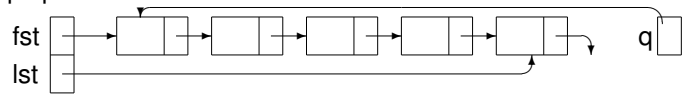
```
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q: pointer to node
    alloc(q)
    q→value:= e
    q→next:= null
    if p.lst = null → p.fst:= q
                      p.lst:= q
      p.lst ≠ null → p.lst→next:= q
                      p.lst:= q
    fi
end proc
```

Decolar

{Pre: p ∼ Q ∧¬is_empty(p)}
proc dequeue(**in**/**out** p:queue)
var q: **pointer to** node

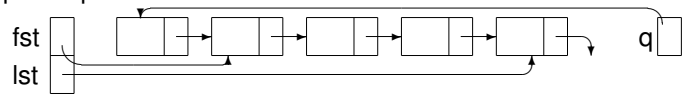


q:= p.fst



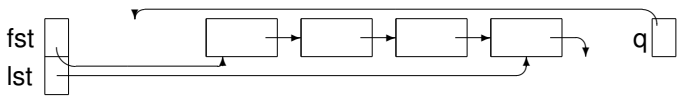
if p.fst = p.lst →
p.fst:= **null** {caso cola con un solo elemento}
p.lst:= **null**

p.fst ≠ p.lst → p.fst:= p.fst->next



fi
free(q)

end proc
{Post: p ∼ decolar(Q)}



Decolar
En limpio

{Pre: p $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(p)}
proc dequeue(**in**/**out** p:queue)
    var q: **pointer to** node
    q:= p.fst
    if p.fst = p.lst $\rightarrow$ p.fst:= **null** {caso cola con un solo elemento}
                p.lst:= **null**
      p.fst $\neq$ p.lst $\rightarrow$ p.fst:= p.fst->next
    fi
    free(q)
end proc
{Post: p $\sim$ decolar(Q)}

Examinar si es vacía

{Pre: p $\sim$ Q}
fun is_empty(p:queue) **ret** b:**Bool**
    b:= (p.fst = **null**)
end fun
{Post: b $\sim$ es_vacía(Q)}

Destroy

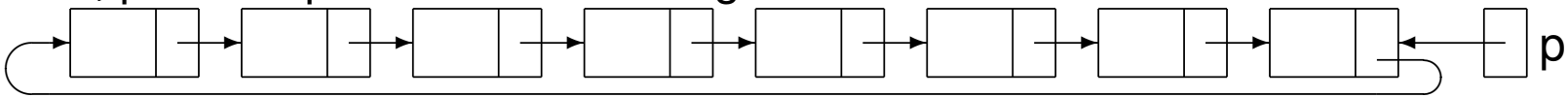
proc destroy(**in**/**out** p:queue)
    while ¬ is_empty(p) **do** dequeue(p) **od**
end proc

Todas las operaciones son constantes, salvo el destroy que es lineal.

Implementación del TAD cola con listas enlazadas ciculares

```
type node = tuple
              value: elem
              next: pointer to node
            end
type queue = pointer to node
```

Gráficamente, puede representarse de la siguiente manera



Explicación

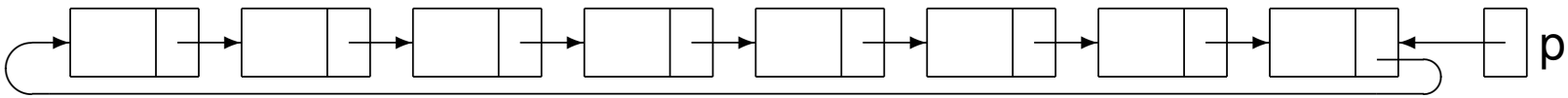
- La lista es circular,
- es decir que además de los punteros que ya teníamos en implementaciones anteriores,
- el último nodo tiene un puntero al primero,
- alcanza con saber dónde se encuentra el último nodo para saber también dónde está el primero.

Cola vacía

proc empty(**out** p:queue)
    p:= **null**
end proc
{Post: p $\sim$ vacia}

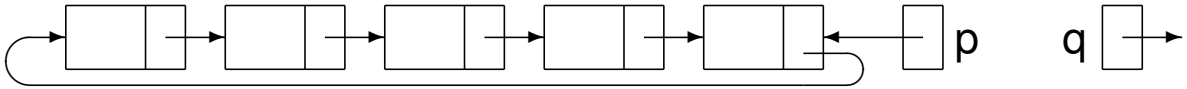
Primer elemento

{Pre: p $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(p)}
fun first(p:queue) **ret** e:elem
    e:= p$\rightarrow$next$\rightarrow$value
end fun
{Post: e $\sim$ primero(Q)}

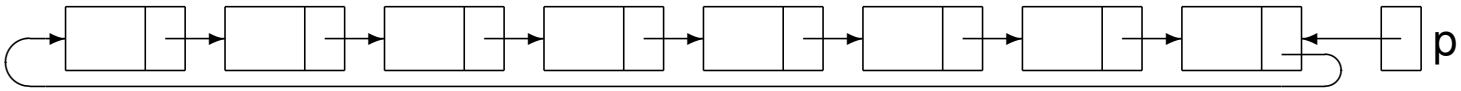


Encolar

{Pre: p $\sim$ Q $\wedge$ e $\sim$ E}
proc enqueue(**in**/**out** p:queue,**in** e:elem)
var q: **pointer to** node

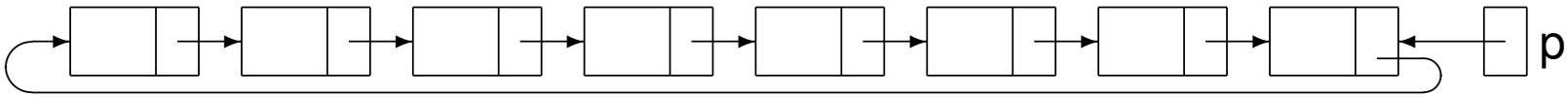


alloc(q)
q$\rightarrow$value:= e
if p = **null** $\rightarrow$ p:= q {caso enqueue en cola vacía}
q$\rightarrow$next:= q
p $\neq$ **null** $\rightarrow$ q$\rightarrow$next:= p$\rightarrow$next {que el nuevo último apunte al primero}
p$\rightarrow$next:= q {que el viejo último apunte al nuevo último}
p:= q {que p también apunte al nuevo último}
fi
end proc
{Post: p $\sim$ encolar(Q,E)}



Decolar

{Pre: p $\sim$ Q $\wedge \neg$is_empty(p)}
proc dequeue(**in**/**out** p:queue)
    var q: **pointer to** node
    q:= p$\rightarrow$next
    if p = q $\rightarrow$ p:= **null** {caso cola con un solo elemento}
      p $\neq$ q $\rightarrow$ p$\rightarrow$next:= q$\rightarrow$next
    fi
    free(q)
end proc
{Post: p $\sim$ decolar(Q)}



Examinar si es vacía

{Pre: p $\sim$ Q}
fun is_empty(p:queue) **ret** b:**Bool**
    b:= (p = **null**)
end fun
{Post: b $\sim$ es_vacía(Q)}

Destroy

proc destroy(**in**/**out** p:queue)
    while ¬ is_empty(p) **do** dequeue(p) **od**
end proc

Todas las operaciones son constantes, salvo el destroy que es lineal.