

# Algoritmos y Estructuras de Datos II

Listas enlazadas

14 de abril de 2014

## Clase de hoy

### 1 Repaso

- TAD contador
- TAD pila
- TAD cola

### 2 Listas enlazadas

- Implementación del TAD pila con listas enlazadas
- Implementación del TAD cola con listas enlazadas
- Implementación de colas con listas enlazadas y dos punteros
- Implementación del TAD cola con listas enlazadas circulares
- Implementación del TAD pcola con listas enlazadas

# Repaso

- cómo vs. qué
- 3 partes
  - 1 análisis de algoritmos
    - algoritmos de ordenación
    - notación  $\mathcal{O}$ ,  $\Omega$  y  $\Theta$ .
    - propiedades y jerarquía
    - recurrencias (D. y V., homogéneas y no homogéneas)
  - 2 tipos de datos
    - tipos concretos (arreglos, listas, tuplas, punteros)
    - tipos abstractos (TAD contador, TAD pila, TAD cola, TAD pcola)
    - implementaciones elementales
    - hoy: implementaciones utilizando listas enlazadas
  - 3 técnicas de resolución de problemas

# Especificación del TAD contador

## TAD contador

### constructores

`inicial` : contador

`incrementar` : contador  $\rightarrow$  contador

### operaciones

`es_inicial` : contador  $\rightarrow$  booleano

`decrementar` : contador  $\rightarrow$  contador

{se aplica sólo a un contador que no sea inicial}

### ecuaciones

`es_inicial(inicial)` = verdadero

`es_inicial(incrementar(c))` = falso

`decrementar(incrementar(c))` = c

## Interface

**type** counter = ... {- no sabemos aún cómo se implementará -}

**proc** init (**out** c: counter) {Post: c ~ inicial}

{Pre: c ~ C} **proc** inc (**in/out** c: counter) {Post: c ~ incrementar(C)}

{Pre: c ~ C  $\wedge$   $\neg$ is\_init(c)}

**proc** dec (**in/out** c: counter)

{Post: c ~ decrementar(C)}

**fun** is\_init (c: counter) **ret** b: **bool** {Post: b = (c ~ inicial)}

## Implementación natural

- **type** counter = nat
- **proc** init (**out** c: counter)  
    c:= 0  
**end proc**
- **proc** inc (**in/out** c: counter)  
    c:= c+1  
**end proc**
- **proc** dec (**in/out** c: counter)  
    c:= c-1  
**end proc**
- **fun** is\_init (c: counter) **ret** b: **bool**  
    b:= (c = 0)  
**end fun**
- Todas las operaciones son  $\mathcal{O}(1)$

## Especificación del TAD pila

**TAD** pila[elem]

### constructores

**vacía** : pila

**apilar** : elem  $\times$  pila  $\rightarrow$  pila

### operaciones

**es\_vacía** : pila  $\rightarrow$  booleano

**primero** : pila  $\rightarrow$  elem {se aplica sólo a una pila no vacía}

**desapilar** : pila  $\rightarrow$  pila {se aplica sólo a una pila no vacía}

### ecuaciones

es\_vacía(**vacía**) = verdadero

es\_vacía(**apilar**(e,p)) = falso

primero(**apilar**(e,p)) = e

desapilar(**apilar**(e,p)) = p

## Interface

**type** stack = ... {- no sabemos aún cómo se implementará -}

**proc** empty(**out** p:stack) {Post: p ~ vacia}

{Pre: p ~ P  $\wedge$  e ~ E}

**proc** push(**in** e:elem,**in/out** p:stack)

{Post: p ~ apilar(E,P)}

{Pre: p ~ P  $\wedge$   $\neg$ is\_empty(p)}

**fun** top(p:stack) **ret** e:elem

{Post: e ~ primero(P)}

## Interface

{Pre:  $p \sim P \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }

**proc** pop(**in/out** p:stack)

{Post:  $p \sim \text{desapilar}(P)$ }

**fun** is\_empty(p:stack) **ret** b:bool

{Post:  $b = (p \sim \text{vacía})$ }

# Implementación

Vimos dos implementaciones:

- Usando listas (si las listas son tipos concretos)
- Usando arreglos.

## Implementación de pilas usando arreglos

- **type** stack = **tuple**  
    elems: **array**[1..N] of elem  
    size: **nat**  
    **end**
- **proc** empty(**out** p:stack)  
    p.size:= 0  
    **end proc**
- {Pre:  $p \sim P \wedge \neg \text{is\_full}(p)$ }  
    **proc** push(**in** e:elem,**in/out** p:stack)  
        p.size:= p.size + 1  
        p.elems[p.size]:= e  
    **end proc**

## Implementación de pilas usando arreglos

- **fun** top(p:stack) **ret** e:elem  
    e:= p.elems[p.size]  
**end fun**
- **proc** pop(in/out p:stack)  
    p.size:= p.size - 1  
**end proc**
- **fun** is\_empty(p:stack) **ret** b:Bool  
    b:= (p.size = 0)  
**end fun**
- **fun** is\_full(p:stack) **ret** b:Bool  
    b:= (p.size = N)  
**end fun**
- Todas las operaciones son  $\mathcal{O}(1)$ .

# Especificación del TAD cola

**TAD** cola[elem]

**constructores**

**vacía** : cola

**encolar** : cola  $\times$  elem  $\rightarrow$  cola

**operaciones**

**es\_vacía** : cola  $\rightarrow$  booleano

**primero** : cola  $\rightarrow$  elem

{se aplica sólo a una cola no vacía}

**decolar** : cola  $\rightarrow$  cola

{se aplica sólo a una cola no vacía}

**ecuaciones**

**es\_vacía**(**vacía**) = verdadero

**es\_vacía**(**encolar**(q,e)) = falso

**primero**(**encolar**(**vacía**,e)) = e

**primero**(**encolar**(**encolar**(q,e'),e)) = **primero**(**encolar**(q,e'))

**decolar**(**encolar**(**vacía**,e)) = **vacía**

**decolar**(**encolar**(**encolar**(q,e'),e)) = **encolar**(**decolar**(**encolar**(q,e')),e)

## Interface

**type** queue = ... {- no sabemos aún cómo se implementará -}

**proc** empty(**out** q:queue) {Post: q ~ vacia}

{Pre: q ~ Q  $\wedge$  e ~ E}

**proc** enqueue(**in/out** q:queue, **in** e:elem)

{Post: q ~ encolar(Q,E)}

{Pre: q ~ Q  $\wedge$   $\neg$ is\_empty(q)}

**fun** first(q:queue) **ret** e:elem

{Post: e ~ primero(Q)}

## Interface

{Pre:  $q \sim Q \wedge \neg \text{is\_empty}(q)$ }

**proc** dequeue(**in/out** q:queue)

{Post:  $q \sim \text{decolar}(Q)$ }

**fun** is\_empty(q:queue) **ret** b:bool

{Post:  $b = (q \sim \text{vacía})$ }

## Implementación

Vimos implementaciones:

- Usando listas (si las listas son tipos concretos)
- Usando arreglos.

## Implementación eficiente de colas usando arreglos

- **type** queue = **tuple**  
                  elems: **array**[0..N-1] **of** elem  
                  fst: **nat**  
                  size: **nat**  
                  **end**
- **proc** empty(**out** q:queue)  
      q.fst:= 0  
      q.size:= 0  
**end proc**
- {Pre:  $q \sim Q \wedge \neg \text{is\_full}(q)$ }  
**proc** enqueue(**in/out** q:queue, **in** e:elem)  
      q.elems[(q.fst + q.size) mod N]:= e  
      q.size:= q.size + 1  
**end proc**

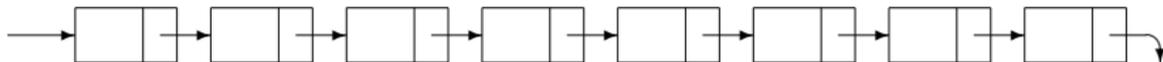
## Implementación eficiente de colas usando arreglos

- **fun** first(q:queue) **ret** e:elem  
    e:= q.elems[q.fst]  
**end fun**
- **proc** dequeue(**in/out** q:queue)  
    q.size:= q.size - 1  
    q.fst:= (q.fst + 1) mod N  
**end proc**
- **fun** is\_empty(q:queue) **ret** b:Bool  
    b:= (q.size = 0)  
**end fun**
- **fun** is\_full(q:queue) **ret** b:Bool  
    b:= (q.size = N)  
**end fun**
- Todas las operaciones son  $O(1)$

# Listas enlazadas

- Por **listas enlazadas** se entiende una manera de implementar listas utilizando tuplas y punteros.
- Hay diferentes clases de listas, la más simple se representa gráficamente así

●



- La representación es parecida a la de cola,
- la diferencia es que cada **nodo** se dibuja como una tupla
- y la flecha que enlaza un nodo con el siguiente nace desde un campo de esa tupla.
- Los nodos son tuplas y las flechas punteros.

## Declaración

- Los nodos son tuplas y las flechas punteros.
- **type** node = **tuple**
  - value: elem
  - next: **pointer to** node**end**
- type** list = **pointer to** node

## Observaciones

- Una lista es un puntero a un primer nodo,
- que a su vez contiene un puntero al segundo,
- éste al tercero, y así siguiendo hasta el último,
- cuyo puntero es **null**
- significando que la lista termina allí.
- Para acceder al  $i$ -ésimo elemento de la lista, debo recorrerla desde el comienzo siguiendo el recorrido señalado por los punteros.
- Esto implica que el acceso a ese elemento no es constante, sino lineal.
- A pesar de ello ofrecen una manera de implementar convenientemente algunos TADs.

## Implementación del TAD pila con listas enlazadas

```
type node = tuple  
    value: elem  
    next: pointer to node  
end  
type stack = pointer to node
```

## Pila vacía

- El procedimiento `empty` inicializa `p` como la pila vacía.
- La pila vacía se implementa con la lista enlazada vacía
- que consiste de la lista que no tiene ningún nodo,
- el puntero al primer nodo de la lista no tiene a quién apuntar.
- Su valor se establece en **null**.

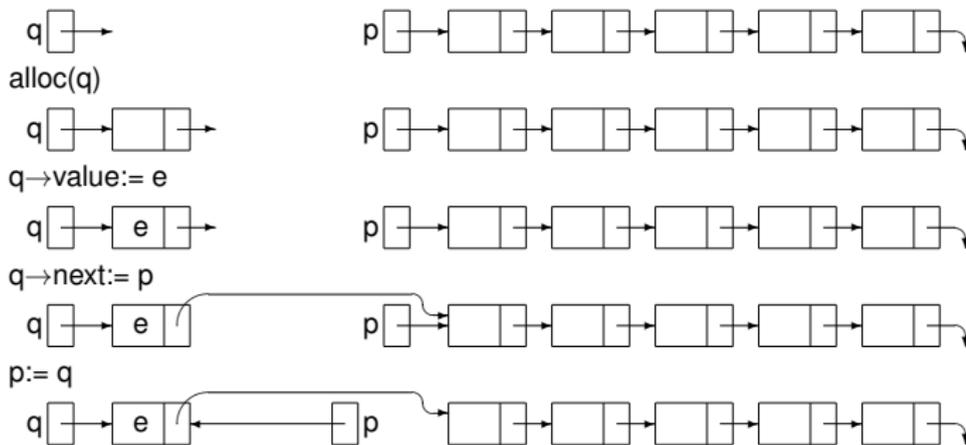
```
proc empty(out p:stack)
    p:= null
end proc
{Post: p ~ vacía}
```

# Apilar

{Pre:  $p \sim P \wedge e \sim E$ }

**proc** push(in e:elem,in/out p:stack)

**var** q: pointer to node



**end proc**

{Post:  $p \sim \text{apilar}(E,P)$ }

# Apilar

## Explicación

- El procedimiento push debe alojar un nuevo elemento en la pila.
- Para ello crea un nuevo nodo ( $\text{alloc}(q)$ ),
- aloja en ese nodo el elemento a agregar a la pila ( $q \rightarrow \text{value} := e$ ),
- enlaza ese nuevo nodo al resto de la pila ( $q \rightarrow \text{next} := p$ )
- y finalmente indica que la pila ahora empieza a partir de ese nuevo nodo que se agregó ( $p := q$ ).

# Apilar

En limpio

```
{Pre:  $p \sim P \wedge e \sim E$ }  
proc push(in e:elem,in/out p:stack)  
    var q: pointer to node  
    alloc(q)  
    q→value:= e  
    q→next:= p  
    p:= q  
end proc  
{Post:  $p \sim \text{apilar}(E,P)$ }
```

## Importancia de la representación gráfica

- Las representaciones gráficas que acompañan al pseudocódigo son de ayuda.
- Su valor es relativo.
- Sólo sirven para entender lo que está ocurriendo de manera intuitiva.
- Hacer un tratamiento formal está fuera de los objetivos de este curso.
- Deben extremarse los cuidados para no incurrir en errores de programación que son muy habituales en el contexto de la programación con punteros.
- Por ejemplo, ¿es correcto el procedimiento push cuando p es la pila vacía?

## Apilar a una pila vacía

{Pre:  $p \sim P \wedge e \sim E$ }

**proc** push(in e:elem,in/out p:stack)

**var** q: **pointer to node**



alloc(q)



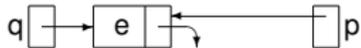
$q \rightarrow \text{value} := e$



$q \rightarrow \text{next} := p$



$p := q$



**end proc**

{Post:  $p \sim \text{apilar}(E,P)$ }

## Primero de una pila

- La función top no tiene más que devolver el elemento que se encuentra en el nodo apuntado por p.
  - {Pre:  $p \sim P \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }
- ```
fun top(p:stack) ret e:elem  
    e:= p→value  
end fun  
{Post:  $e \sim \text{primero}(P)$ }
```

# Desapilar

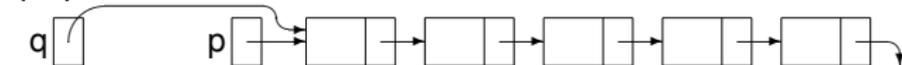
{Pre:  $p \sim P \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }

**proc** pop(in/out p:stack)

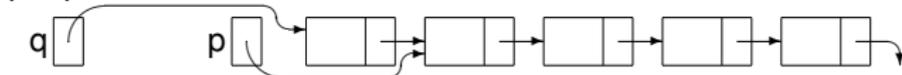
**var** q: **pointer to node**



$q := p$



$p := p \rightarrow \text{next}$



free(q)



**end proc**

{Post:  $p \sim \text{desapilar}(P)$ }

## Desapilar

Explicación

- El procedimiento pop debe liberar el primer nodo de la lista
- y modificar p de modo que apunte al nodo siguiente.
- Observar que el valor que debe adoptar p se encuentra en el primer nodo (campo next).
- Por ello, antes de liberarlo es necesario utilizar esa información que se encuentra en él.
- Si modifico el valor de p, ¿cómo voy a hacer luego para liberar el primer nodo que sólo era accesible gracias al viejo valor de p?
- Hay que recordar en q el viejo valor de p ( $q := p$ ),
- hacer que p apunte al segundo nodo ( $p := p \rightarrow \text{next}$ )
- y liberar el primer nodo ( $\text{free}(q)$ ).
- Al finalizar, p apunta al primer nodo de la nueva pila.

## Desapilar

En limpio

```
{Pre:  $p \sim P \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }  
proc pop(in/out p:stack)  
    var q: pointer to node  
    q:= p  
    p:= p→next  
    free(q)  
end proc  
{Post:  $p \sim \text{desapilar}(P)$ }
```

P no puede ser vacía.

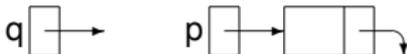
Pero ¿qué pasa si tiene un solo elemento?

## Desapilar de una pila unitaria

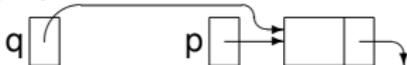
{Pre:  $p \sim P \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }

**proc** pop(in/out p:stack)

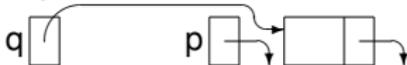
**var** q: pointer to node



$q := p$



$p := p \rightarrow \text{next}$



free(q)



**end proc**

{Post:  $p \sim \text{desapilar}(P)$ }

## Examinar si es vacía

- La función `is_empty` debe comprobar que la pila recibida esté vacía, que se representa por el puntero **null**.

- {Pre:  $p \sim P$ }

```
fun is_empty(p:stack) ret b:Bool
```

```
    b:= (p = null)
```

```
end fun
```

```
{Post: b ~ es_vacía(P)}
```

## Destrucción de la pila

- Como el manejo de la memoria es explícito, es conveniente agregar una operación para destruir una pila.
- Esta operación recorre la lista enlazada liberando todos los nodos que conforman la pila.
- Puede definirse utilizando las operaciones proporcionadas por la implementación del TAD pila.
- **proc** destroy(**in/out** p:stack)  
    **while**  $\neg$  is\_empty(p) **do** pop(p) **od**  
**end proc**

## Conclusiones

- Todas las operaciones (salvo destroy) son constantes.
- Destroy es lineal.
- stack y **pointer to** node son sinónimos,
- pero las hemos usado diferente:
  - stack, cuando la variable representa una pila,
  - **pointer to** node cuando se trata de un puntero que circunstancialmente aloja la dirección de un nodo.

# Implementación del TAD cola con listas enlazadas

## Implementación ingenua

- Reusar lo más posible la del TAD pila,
- **type** queue = **pointer to** node
- donde node se define como para el TAD pila,
- empty, is\_empty y destroy como para el TAD pila,
- first como top,
- y dequeue como pop.

# Implementación del TAD cola con listas enlazadas

## Implementación ingenua

Sólo cambia la implementación de enqueue:

```

{Pre: p ~ Q ∧ e ~ E}
proc enqueue(in/out p:queue, in e:elem)
    var q,r: pointer to node
    alloc(q)                                {se reserva espacio para el nuevo nodo}
    q→value:= e                             {se aloja allí el elemento e}
    q→next:= null                          {el nuevo nodo (*q) va a ser el último de la cola}
   {el nodo *q está listo, debe ir al final de la cola}

    if p = null → p:= q                      {si la cola es vacía con esto alcanza}
    p ≠ null →                               {si no es vacía, se inicia la búsqueda de su último nodo}
        r:= p                                {r realiza la búsqueda a partir del primer nodo}
        while r→next ≠ null do             {mientras *r no sea el último nodo}
            r:= r→next                       {que r pase a señalar el nodo siguiente}
        od                                   {ahora *r es el último nodo}
        r→next:= q                           {que el siguiente del que era último sea ahora *q}

    fi
end proc
{Post: p ~ encolar(Q,E)}
    
```



## Encolar (implementación ingenua)

En limpio

```
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
  var q,r: pointer to node
  alloc(q)
  q→value:= e
  q→next:= null
  if p = null → p:= q
    p ≠ null → r:= p
      while r→next ≠ null do
        r:= r→next
      od
      r→next:= q
  fi
end proc
```

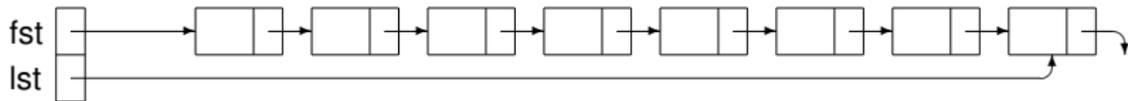
## Conclusiones

- Todas las operaciones son constantes,
- salvo enqueue que es lineal,
- ya que debe recorrer toda la lista hasta encontrar el último nodo.
- Hay al menos dos soluciones a este problema:
  - Mantener dos punteros: uno al primero y otro al último,
  - o utilizar listas enlazadas **circulares**.

# Implementación del TAD cola con listas enlazadas y dos punteros

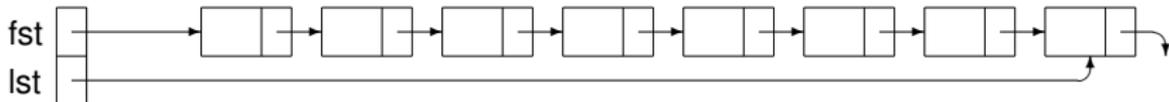
```
type node = tuple  
    value: elem  
    next: pointer to node  
end  
type queue = tuple  
    fst: pointer to node  
    lst: pointer to node  
end
```

Gráficamente, puede representarse de la siguiente manera



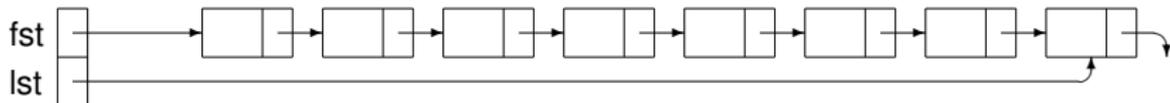
## Cola vacía

```
proc empty(out p:queue)  
    p.fst:= null  
    p.lst:= null  
end proc  
{Post: p ~ vacia}
```



## Primer elemento

```
{Pre:  $p \sim Q \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }  
fun first(p:queue) ret e:elem  
    e:= p.fst  $\rightarrow$  value  
end fun  
{Post:  $e \sim \text{primero}(Q)$ }
```





## Encolar

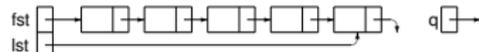
En limpio

```
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
  var q: pointer to node
  alloc(q)
  q→value:= e
  q→next:= null
  if p.lst = null → p.fst:= q
                    p.lst:= q
    p.lst ≠ null → p.lst→next:= q
                    p.lst:= q
  fi
end proc
```

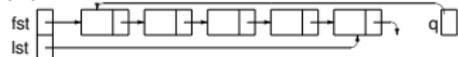
# Decolar

{Pre:  $p \sim Q \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$   
**proc** dequeue(**in/out** p:queue)

**var** q: pointer to node



q := p.fst

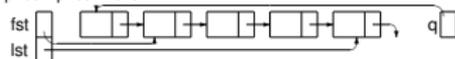


**if** p.fst = p.lst  $\rightarrow$

p.fst := null      {caso cola con un solo elemento}  
p.lst := null



p.fst  $\neq$  p.lst  $\rightarrow$  p.fst := p.fst->next



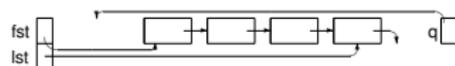
**fi**

free(q)



**end proc**

{Post:  $p \sim \text{decolar}(Q)$ }



## Decolar

En limpio

```
{Pre:  $p \sim Q \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }  
proc dequeue(in/out p:queue)  
  var q: pointer to node  
  q:= p.fst  
  if p.fst = p.lst  $\rightarrow$  p.fst:= null {caso cola con un solo elemento}  
    p.lst:= null  
  p.fst  $\neq$  p.lst  $\rightarrow$  p.fst:= p.fst->next  
  fi  
  free(q)  
end proc  
{Post:  $p \sim \text{decolar}(Q)$ }
```

## Examinar si es vacía

```
{Pre: p ~ Q}  
fun is_empty(p:queue) ret b:Bool  
    b:= (p.fst = null)  
end fun  
{Post: b ~ es_vacía(Q)}
```

## Destroy

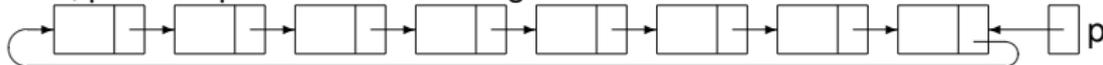
```
proc destroy(in/out p:queue)
    while ¬ is_empty(p) do dequeue(p) od
end proc
```

Todas las operaciones son constantes, salvo el destroy que es lineal.

# Implementación del TAD cola con listas enlazadas circulares

```
type node = tuple  
    value: elem  
    next: pointer to node  
end  
type queue = pointer to node
```

Gráficamente, puede representarse de la siguiente manera



## Explicación

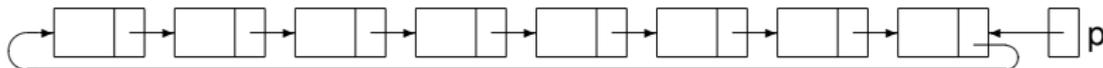
- La lista es circular,
- es decir que además de los punteros que ya teníamos en implementaciones anteriores,
- el último nodo tiene un puntero al primero,
- alcanza con saber dónde se encuentra el último nodo para saber también dónde está el primero.

## Cola vacía

```
proc empty(out p:queue)
    p := null
end proc
{Post: p ~ vacia}
```

## Primer elemento

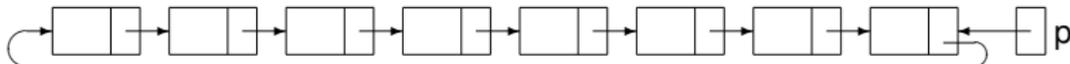
```
{Pre:  $p \sim Q \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }  
fun first(p:queue) ret e:elem  
    e:= p→next→value  
end fun  
{Post:  $e \sim \text{primero}(Q)$ }
```



# Encolar

```

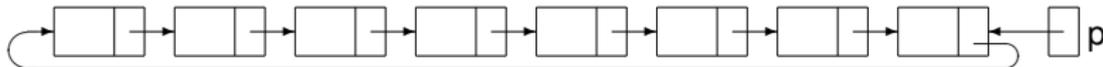
{Pre: p ~ Q ∧ e ~ E}
proc enqueue(in/out p:queue,in e:elem)
    var q: pointer to node
    alloc(q)
    q→value:= e
    if p = null → p:= q                {caso enqueue en cola vacía}
        q→next:= q
    p ≠ null → q→next:= p→next        {que el nuevo último apunte al primero}
        p→next:= q                    {que el viejo último apunte al nuevo último}
        p:= q                          {que p también apunte al nuevo último}
    fi
end proc
{Post: p ~ encolar(Q,E)}
    
```



# Decolar

```

{Pre:  $p \sim Q \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }
proc dequeue(in/out p:queue)
    var q: pointer to node
    q:= p.fst
    if p.fst = p.lst  $\rightarrow$  p.fst:= null                {caso cola con un solo elemento}
        p.lst:= null
    p.fst  $\neq$  p.lst  $\rightarrow$  p.fst:= p.fst->next
    fi
    free(q)
end proc
{Post:  $p \sim \text{decolar}(Q)$ }
    
```



## Examinar si es vacía

```
{Pre: p ~ Q}  
fun is_empty(p:queue) ret b:Bool  
    b:= (p = null)  
end fun  
{Post: b ~ es_vacía(Q)}
```

## Destroy

```
proc destroy(in/out p:queue)
    while  $\neg$  is_empty(p) do dequeue(p) od
end proc
```

Todas las operaciones son constantes, salvo el destroy que es lineal.

## Implementación del TAD pcola con listas enlazadas circulares

- Se reusa la del TAD cola con listas enlazadas circulares,
- **type** queue = **pointer to node**
- Se asume un orden “mayor prioridad que” entre los elementos.
- Las operaciones vacía, encolar, es vacía y destroy se mantienen intactas.
- Las operaciones primero y decolar deben recorrer la lista para buscar o borrar el máximo.

```

{Pre:  $p \sim Q \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }
fun first(p:pqueue) ret e:elem
    var r: pointer to node           {el puntero r para recorrer la lista enlazada}
    r:= p→next                         {*r es el primer nodo}
    e:= r→value                         {por ahora éste es el máximo}
    while r ≠ p do                   {mientras *r no sea el último nodo}
        r:= r→next                     {que r pase a señalar el nodo siguiente}
        if e < r→value then e:= r→value fi   {que e sea el nuevo máximo}
    od
end fun
{Post:  $e \sim \text{primero}(Q)$ }
    
```

```

{Pre:  $p \sim Q \wedge \neg \text{is\_empty}(p)$ }
proc dequeue(in/out p:pqueue)
    var r, pmax: pointer to node
    r := p                                {*(r→next) es el primer nodo}
    pmax := p                             {por ahora pmax→next→value es el máximo}
    if p = p→next then p := null        {caso cola con un solo elemento}
    else while r→next ≠ p do           {mientras *(r→next) no sea el último nodo}
        r := r→next                     {que r pase a señalar el nodo siguiente}
        if pmax→next→value < r→next→value
            then pmax := r               {pmax→next→value es el nuevo máximo}
        fi
    od                                  {ahora hay que saltar *(pmax→next)}
    r := pmax→next
    pmax→next := r→next
    p := pmax    {sólo es útil cuando r = p, pero se puede hacer siempre}
fi
    free(r)
end proc
{Post:  $p \sim \text{decolar}(Q)$ }
    
```

## Conclusiones

- Las dos operaciones son lineales,
- no es una buena implementación del TAD pcola
- ya que existen implementaciones mucho más eficientes,
- basadas en una estructura llamada heap.
- Lo veremos más adelante.