Algoritmos y Estructuras de Datos II

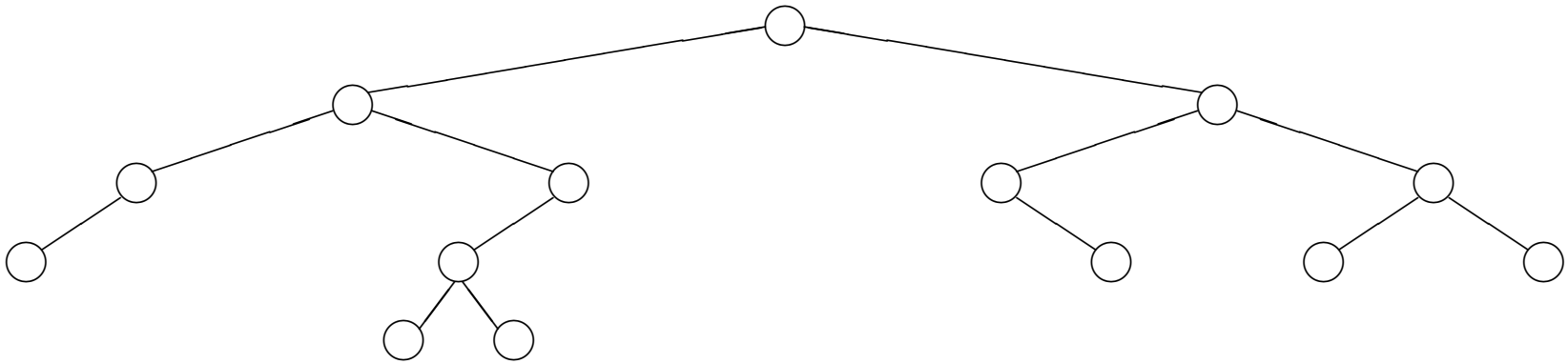
Árboles binarios

27 de abril de 2015

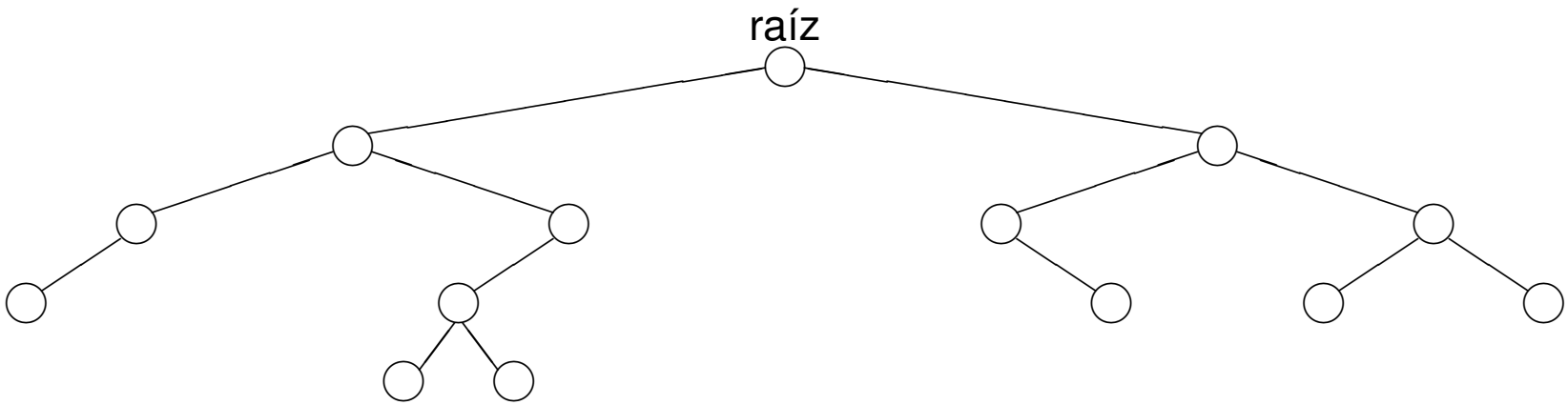
Clase de hoy

1. Árboles Binarios
   - Intuición
   - Especificación
   - Terminología habitual
   - Implementación con punteros
   - Posiciones

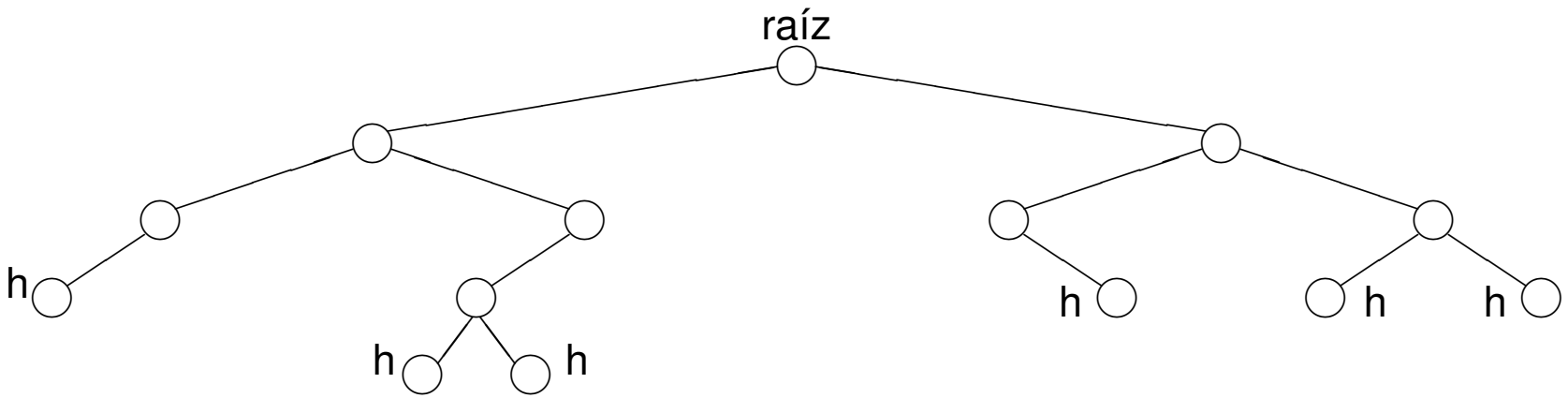
Intuición



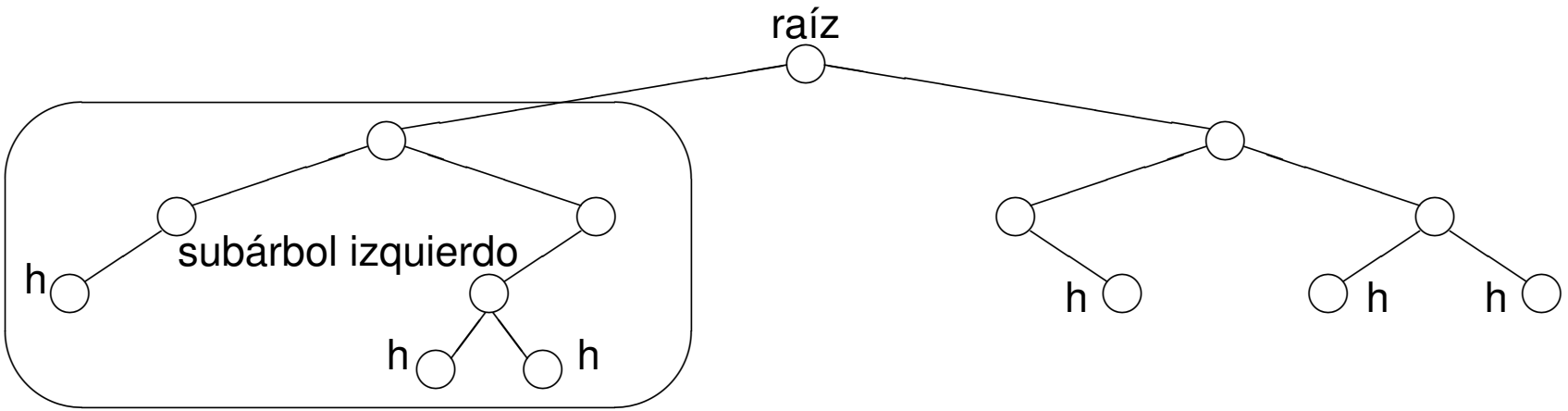
Intuición



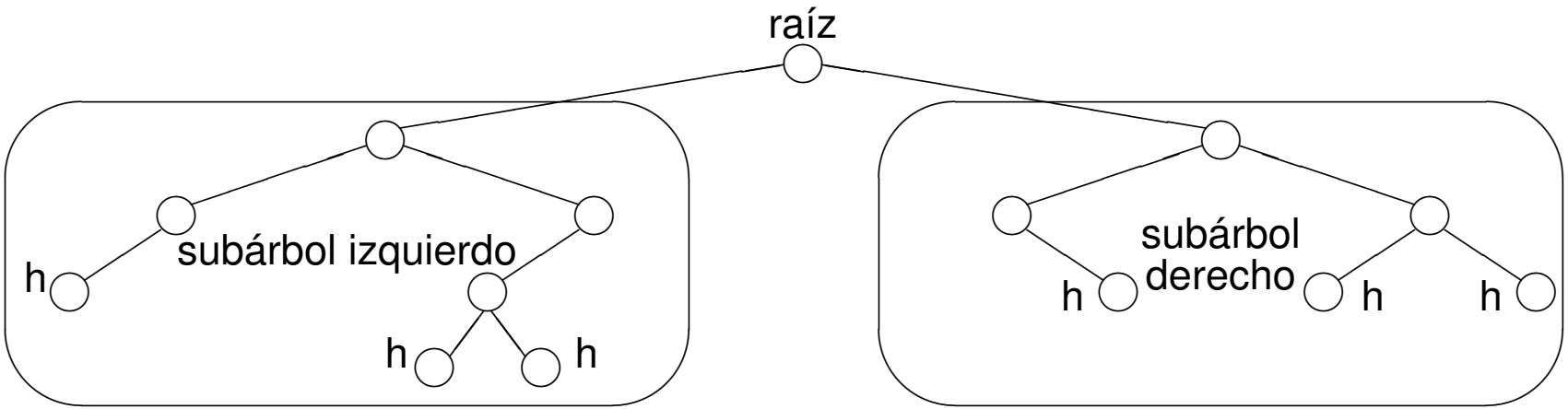
Intuición



Intuición



Intuición



- De cada circulo, cuelgan dos subárboles.
- En el caso de las hojas, los subárboles son vacíos.
- Todos los árboles pueden construirse con los constructores
  - $<>$, que construye un árbol vacío
  - $< \_, \_, \_ >$, que construye un árbol no vacío a partir de un elemento y dos subárboles

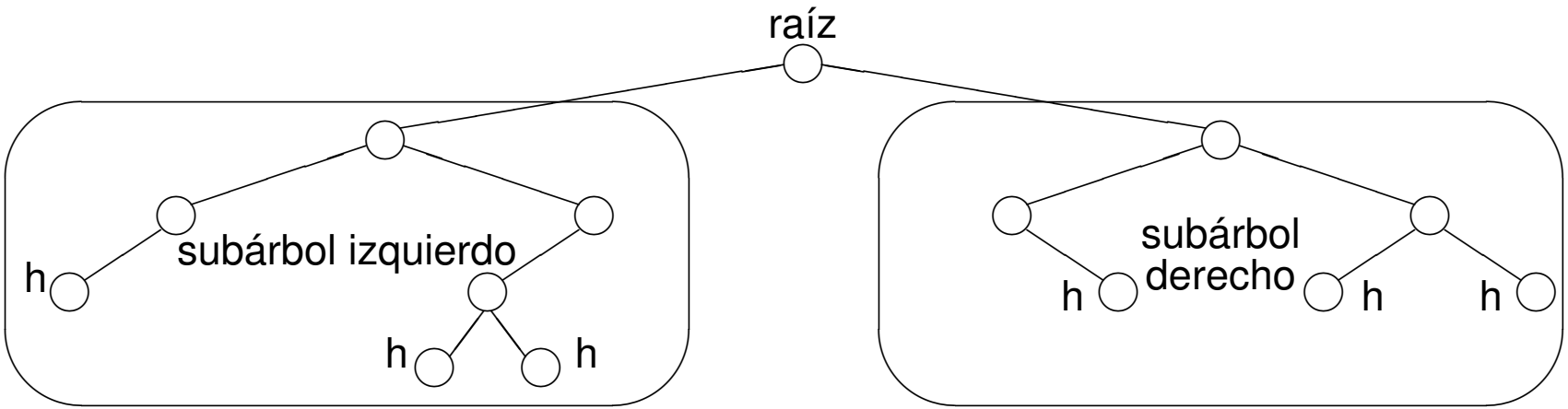
Especificación del TAD árbol binario

```
module TADÁrbolBinario where

data ÁrbolBinario e = <>
                    | < _, _, _ > (ÁrbolBinario e) e (ÁrbolBinario e)

es_vacío :: ÁrbolBinario e → Bool
raíz :: ÁrbolBinario e → e
izquierdo :: ÁrbolBinario e → ÁrbolBinario e
derecho :: ÁrbolBinario e → ÁrbolBinario e
- - las tres últimas se aplican sólo a árbol no vacío

es_vacía <> = True
es_vacía <i,r,d> = False

raíz <i,r,d> = r
izquierdo <i,r,d> = i
derecho <i,r,d> = d
```

Notación <>

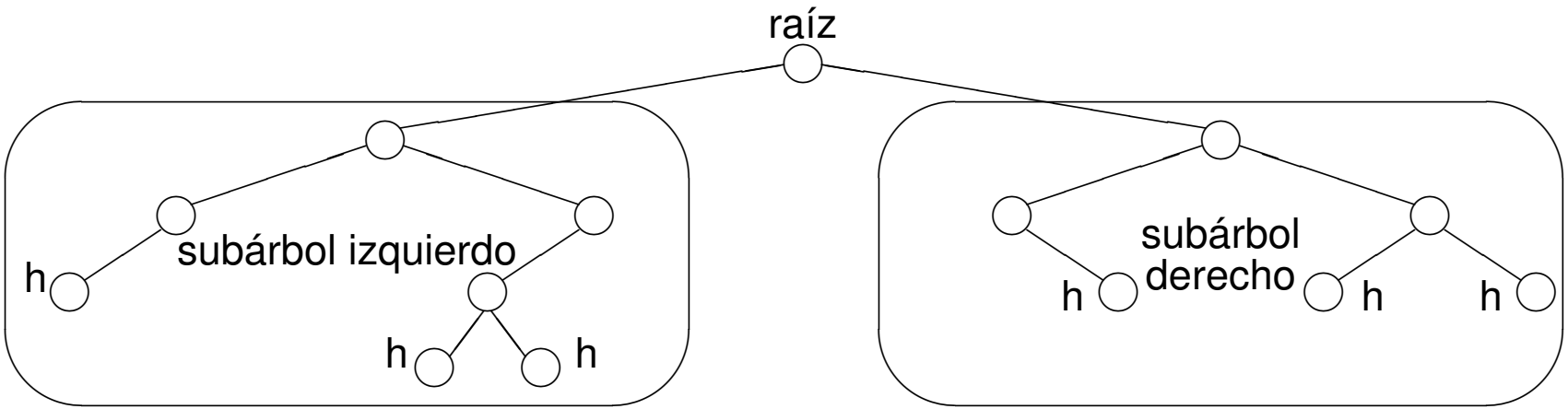
- Notar la sobrecarga de la notación <>:
- cuando no tiene ningún argumento, <> es el árbol vacío,
- cuando tiene tres argumentos, <i,r,d> es el árbol no vacío cuya raíz es *r*, subárbol izquierdo es *i* y subárbol derecho es *d*.
- Una hoja es un árbol de la forma <<>,r,<>>. Se la abrevia <r>.
- Conclusión: la notación <> puede tener 0, 1 ó 3 argumentos.

Botánica y genealogía



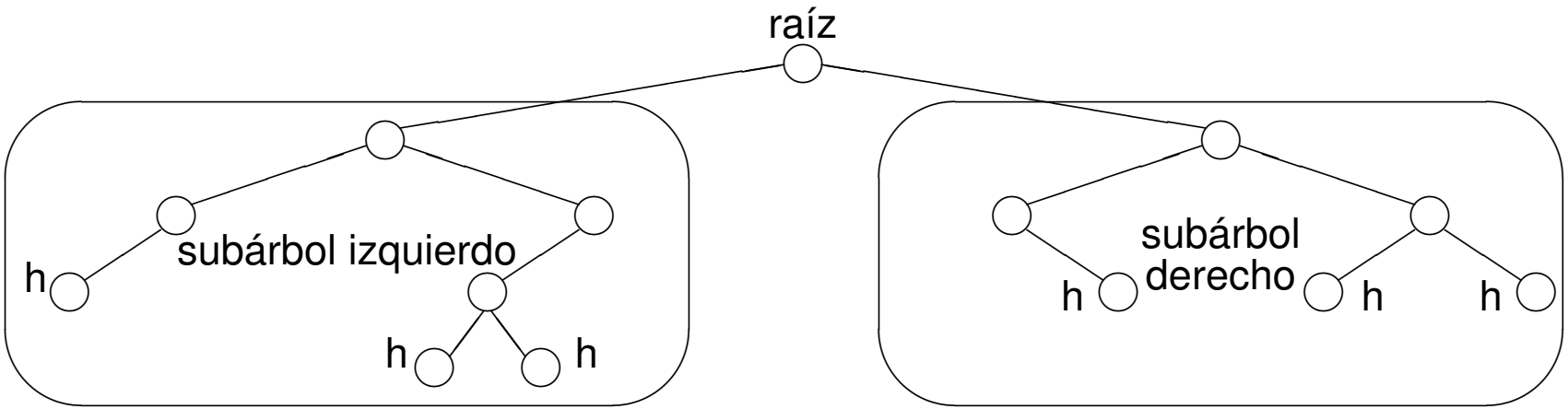
- Un **nodo** es un árbol no vacío.
- Tiene **raíz**, **subárbol izquierdo** y **subárbol derecho**.
- A los subárboles se los llama también **hijos** (izquierdo y derecho).
- Y al nodo se le dice **padre** de sus hijos.
- Una **hoja** es un nodo con los dos hijos vacíos.

Más genealogía



- Dos **hermanos** son hijo izquierdo y derecho del mismo padre.
- Un **camino** es una secuencia $A_1, \ldots, A_n$ donde cada árbol es hijo del anterior.
- A es **ancestro** de B sii hay un camino (de longitud ≥ 0) de A a B,
- en ese caso B es **descendiente** o **subárbol** de A
- un camino se puede identificar con un recorrido descendente del árbol.

Altura, profundidad, nivel



- Decimos que siempre hay un camino de longitud 0 de un árbol a sí mismo.
- La **altura** de un árbol es la longitud del camino que va desde él hasta el subárbol vacío más lejano.
- La **profundidad** de un subárbol es la longitud del camino que va desde el árbol hasta dicho subárbol.
- Se llama **nivel** al conjunto de los subárboles de igual profundidad.

Implementación con punteros

```
type node = tuple
                lft: pointer to node
                value: elem
                rgt: pointer to node
            end
type bintree = pointer to node

fun empty() ret t:bintree
    t:= null
end
{Post: t ~<> }
```

Implementación con punteros

{Pre: I $\sim$ L $\wedge$ e $\sim$ E $\wedge$ r $\sim$ R}
fun node(I:bintree,e:elem,r:bintree) **ret** t:bintree
    alloc(t)
    t$\rightarrow$lft:= I
    t$\rightarrow$value:= e
    t$\rightarrow$rgt:= r
{Post: t $\sim$ <L,E,R>} **end**

{Pre: t $\sim$ T $\wedge\neg$ is_empty(t)}
fun root(t:bintree) **ret** e:elem
    e:= t$\rightarrow$value
end
{Post: e $\sim$ raíz(T)}

Implementación con punteros

{Pre: t $\sim$ T $\wedge\neg$ is_empty(t)}
fun left(t:bintree) **ret** l:bintree
    l:= t$\rightarrow$lft
end
{Post: l $\sim$ izquierdo(T)}

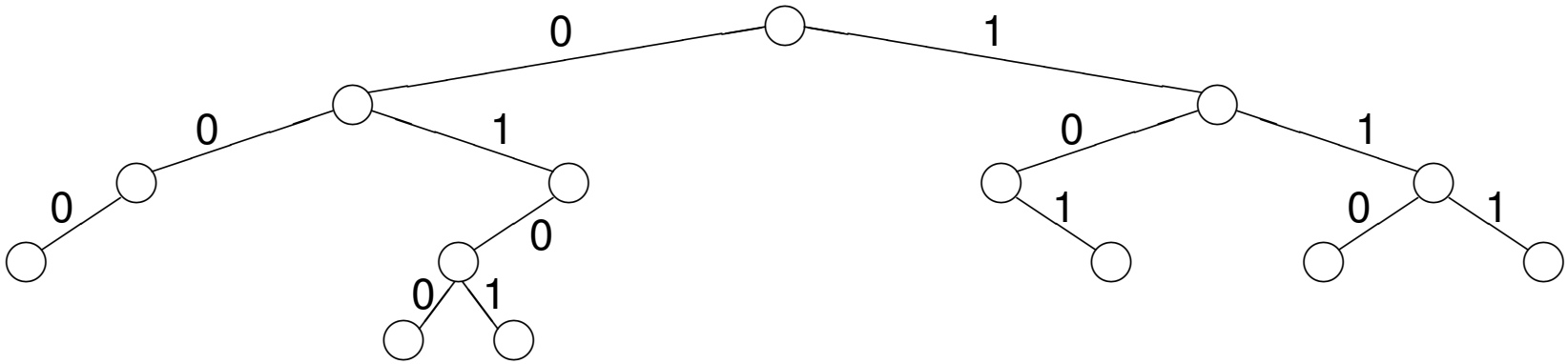
{Pre: t $\sim$ T $\wedge\neg$ is_empty(t)}
fun right(t:bintree) **ret** r:bintree
    r:= t$\rightarrow$rgt
end
{Post: r $\sim$ derecho(T)}

Implementación con punteros

{Pre: t $\sim$ T}
fun is_empty(t:bintree) **ret** b:**bool**
    b:= (t = **null**)
end
{Post: b $\sim$ es_vacío(T)}

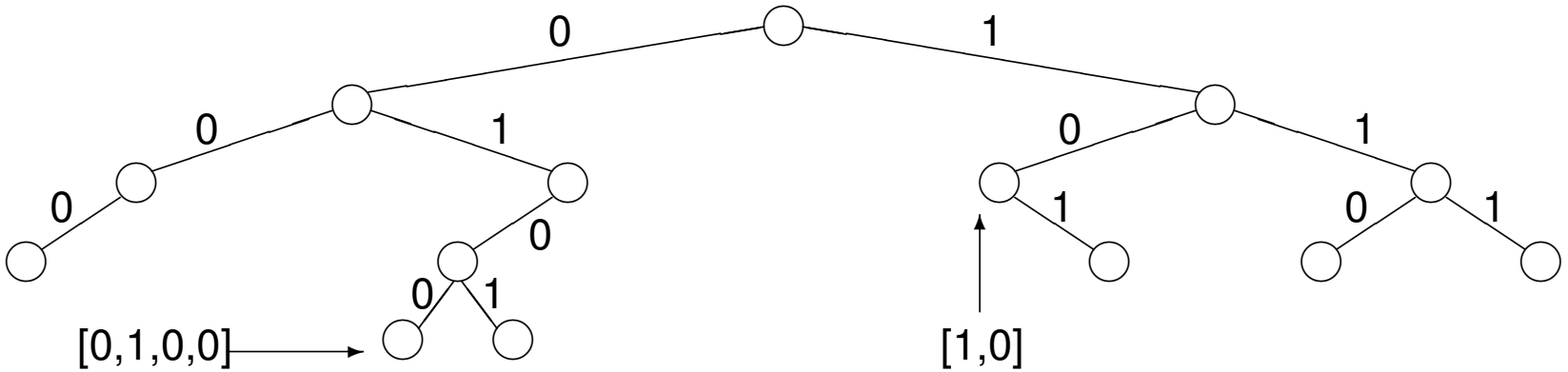
proc destroy(**in**/**out** t:bintree)
    if $\neg$ is_empty(t) **then** destroy(left(t))
                destroy(right(t))
                free(t)
                t:= **null**
    fi
end

Indicaciones



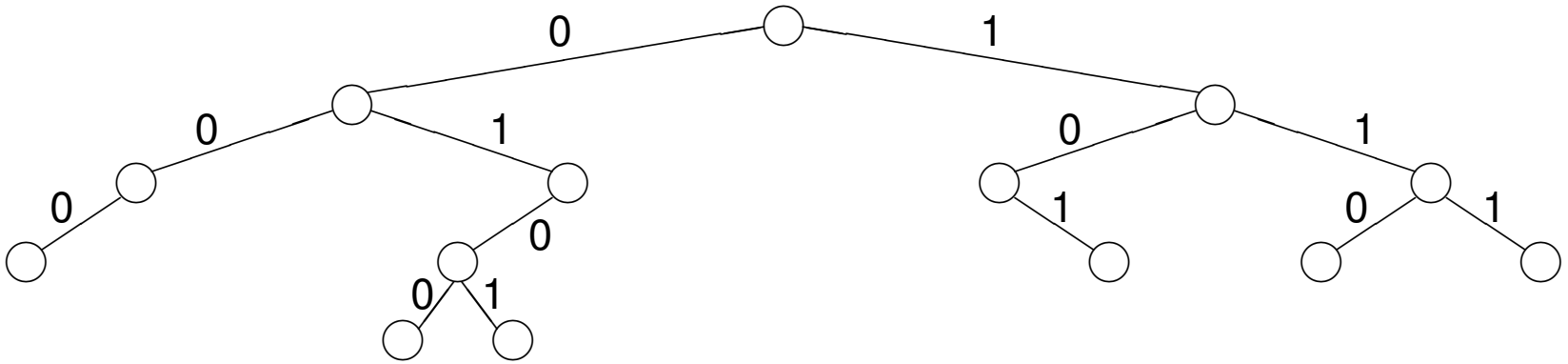
- A cada arista que conecta un padre con su hijo se la rotula 0 si es con el hijo izquierdo y 1 si es el derecho,
- Este 0 ó 1 puede entenderse como dando **indicaciones**
- 0 es ir a la izquierda
- 1 es ir a la derecha

Posiciones



- Una lista de 0's y 1's sirve para desplazarse desde la raíz hacia las hojas.
- Cada subárbol queda señalado por una lista de 0's y 1's.
- Estas listas de 0's y 1's marcan **posiciones** dentro del árbol.
- Definimos $pos = [\{0, 1\}]$.
- Es el conjunto de todas las posiciones.

Selección de subárbol

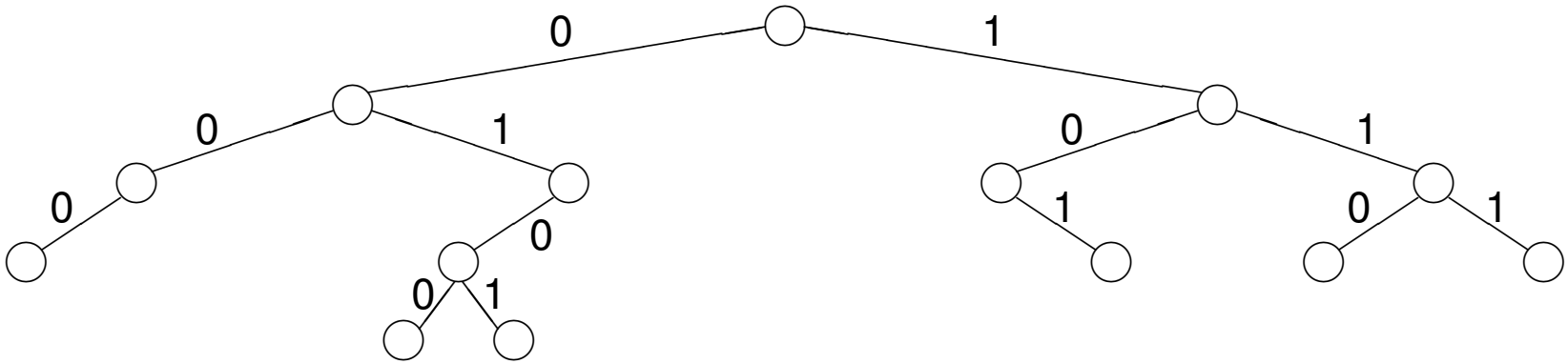


Dado un árbol t y una posición $p \in pos$, $t \downarrow p$ es el subárbol de t que se encuentra en la posición p:

$<>\downarrow p = <>$
$< i, e, d >\downarrow [] = < i, e, d >$
$< i, e, d >\downarrow (0 \triangleright p) = i \downarrow p$
$< i, e, d >\downarrow (1 \triangleright p) = d \downarrow p$

Se define $pos(t) = \{p \in pos \mid t \downarrow p \neq <>\}$. Es el conjunto de las posiciones del árbol binario t.

Selección de elemento



Dado un árbol t y una posición $p \in pos(t)$, $t.p$ es el elemento de t que se encuentra en la posición p:

$< i, e, d > .[] = e$
$< i, e, d > .(0 \triangleright p) = i.p$
$< i, e, d > .(1 \triangleright p) = d.p$

o equivalentemente $t.p = raiz(t \downarrow p)$.