Algoritmos y Estructuras de Datos II

Recorriendo grafos

Clase de hoy

Repaso

- cómo vs. qué
- 3 partes
  1. análisis de algoritmos
  2. tipos de datos
  3. técnicas de resolución de problemas
     - divide y vencerás
     - algoritmos voraces
     - backtracking
     - programación dinámica: problema de la moneda, problema de la mochila
     - recorrida de grafos

Clase de hoy

1. Repaso
2. Recorrida de grafos
   - Generalidades
   - Árboles binarios
   - Árboles finitarios
   - Grafos arbitrarios, DFS
   - Grafos arbitrarios, BFS

Recorrida de grafos

Recorrer un grafo, significa **procesar** los vértices del mismo, de forma organizada de modo de asegurarse:

- que todos los vértices sean **procesados**,
- que ninguno de ellos sea **procesado** más de una vez.

Se habla de **procesar** los vértices, pero también utilizaremos la palabra **visitar** los vértices. En este contexto, son sinónimos. Puede haber más de una forma natural de recorrer un cierto grafo.

Clase de hoy

Recorrida de árboles binarios

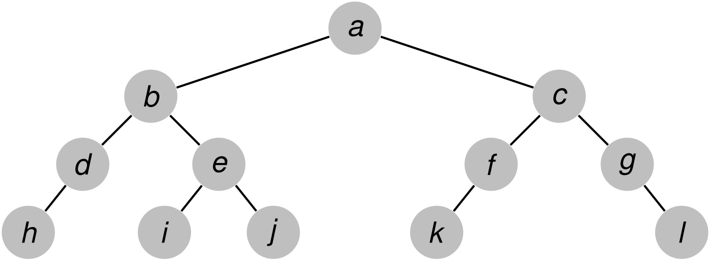
Un caso de grafo sencillo que ya han visto es el de árbol binario. Se han visto 3 maneras de **recorrerlo**:

pre-order
: Se **visita** primero el elemento que se encuentra en la raíz, luego se **recorre** el subárbol izquierdo y finalmente se **recorre** el subárbol derecho.

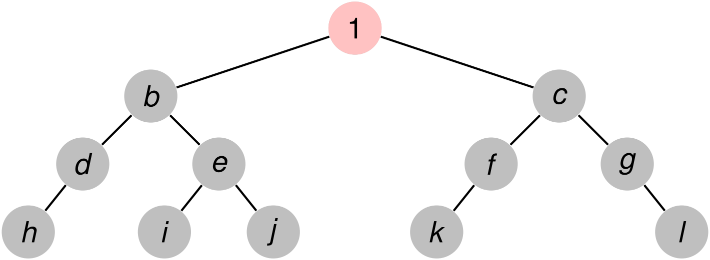
in-order
: Se **recorre** el subárbol izquierdo, luego se **visita** el elemento que se encuentra en la raíz y finalmente se **recorre** el subárbol derecho.

pos-order
: Se **recorre** el subárbol izquierdo, luego el derecho y finalmente se **visita** el elemento que se encuentra en la raíz.

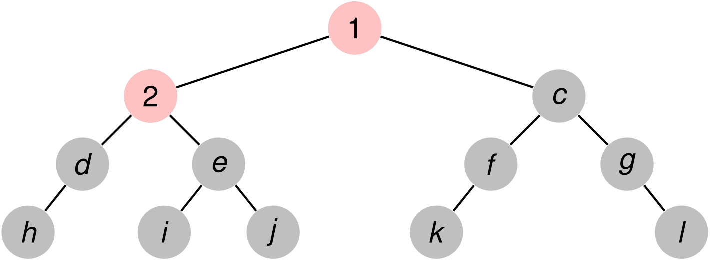
Ejemplo de árbol binario



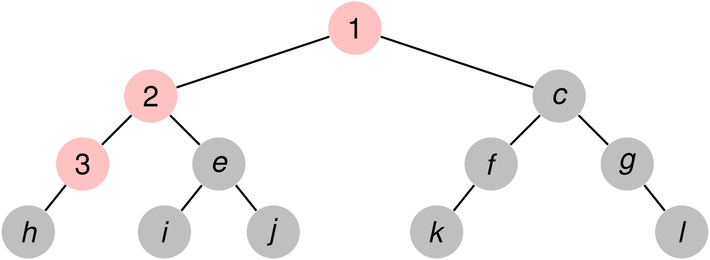
Ejemplo, recorrida pre-order



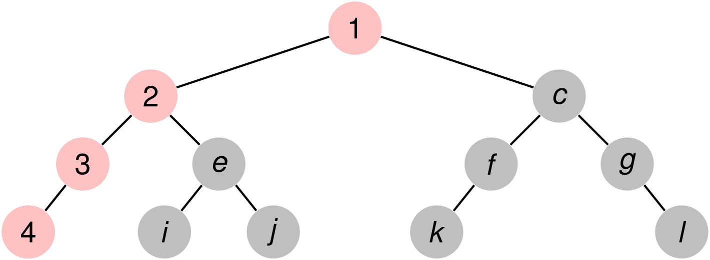
Ejemplo, recorrida pre-order



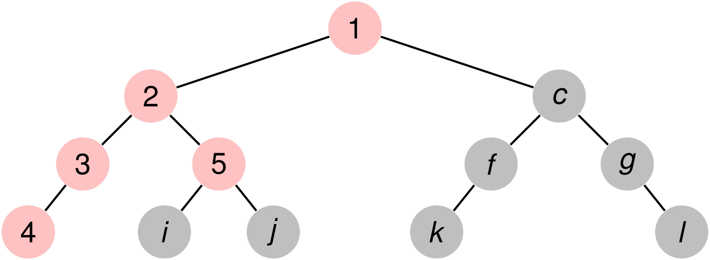
Ejemplo, recorrida pre-order



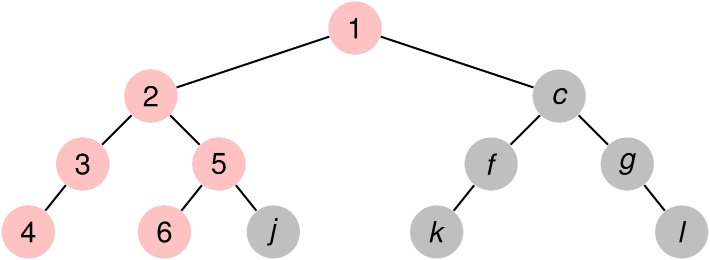
Ejemplo, recorrida pre-order



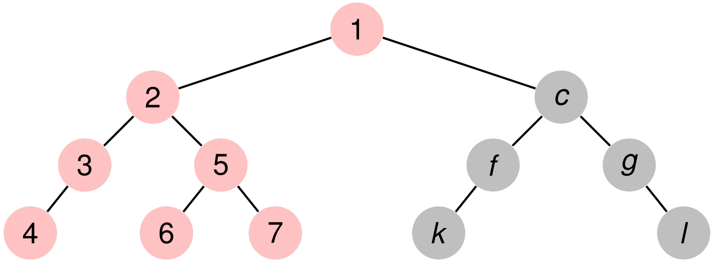
Ejemplo, recorrida pre-order



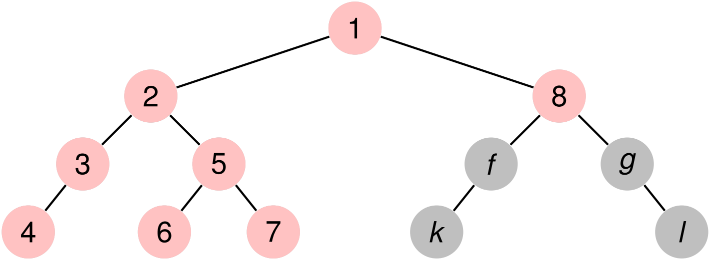
Ejemplo, recorrida pre-order



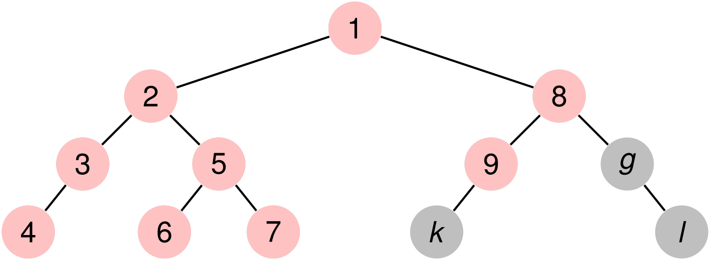
Ejemplo, recorrida pre-order



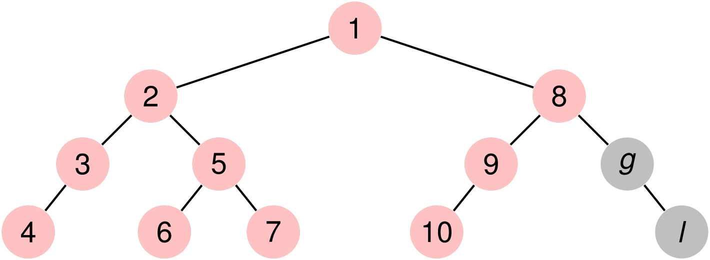
Ejemplo, recorrida pre-order



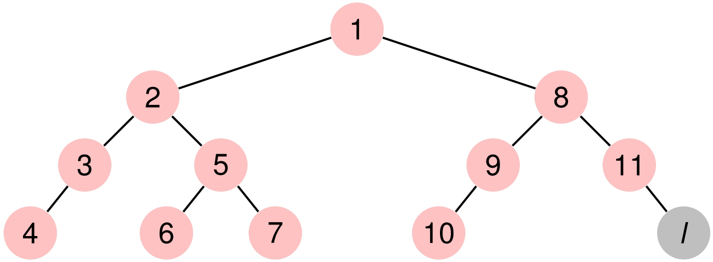
Ejemplo, recorrida pre-order



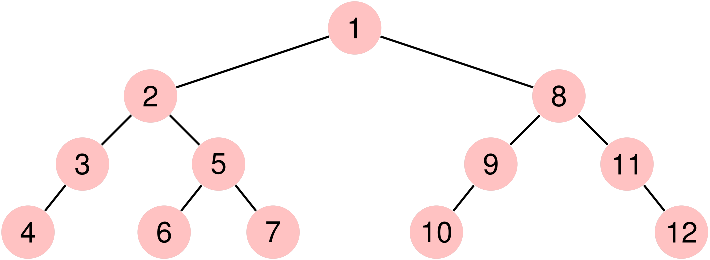
Ejemplo, recorrida pre-order



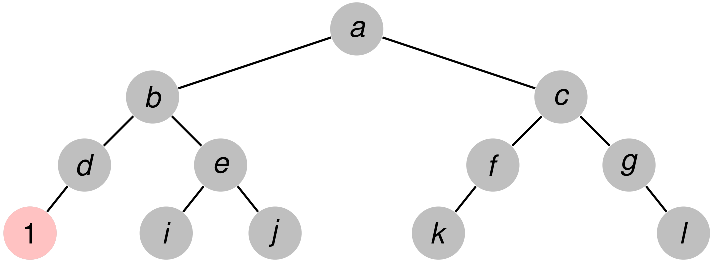
Ejemplo, recorrida pre-order



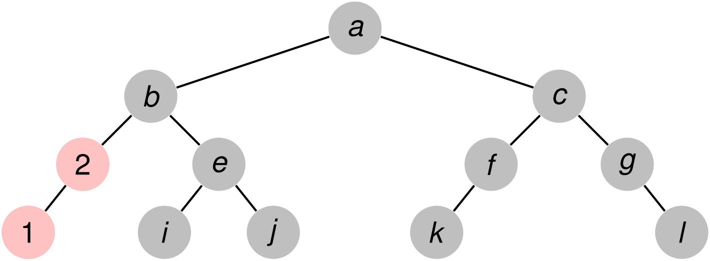
Ejemplo, recorrida pre-order



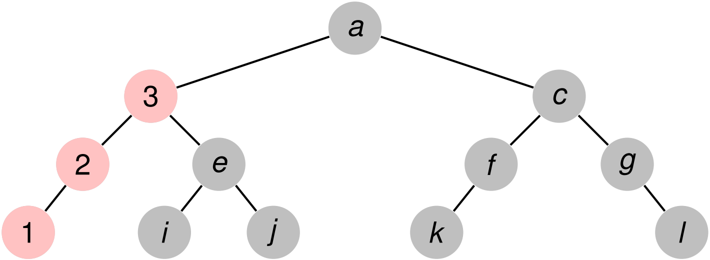
Ejemplo, recorrida in-order



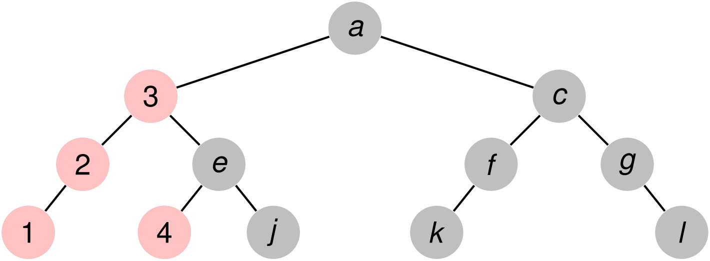
Ejemplo, recorrida in-order



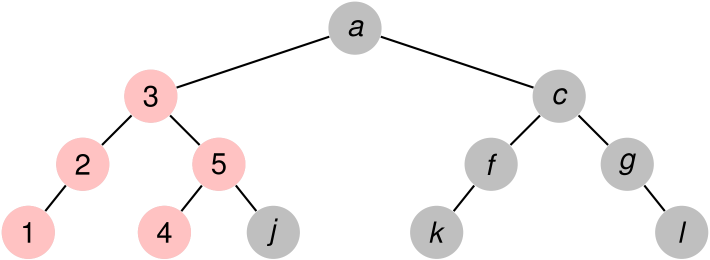
Ejemplo, recorrida in-order



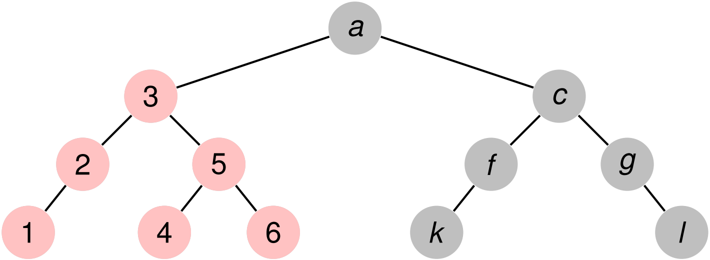
Ejemplo, recorrida in-order



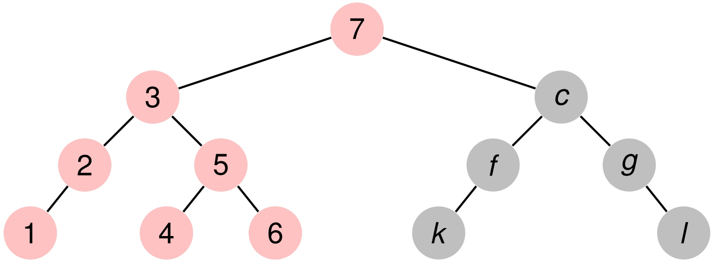
Ejemplo, recorrida in-order



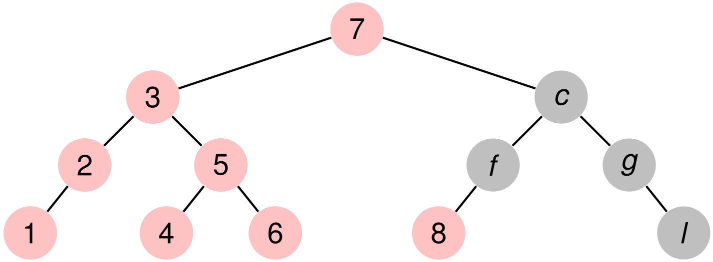
Ejemplo, recorrida in-order



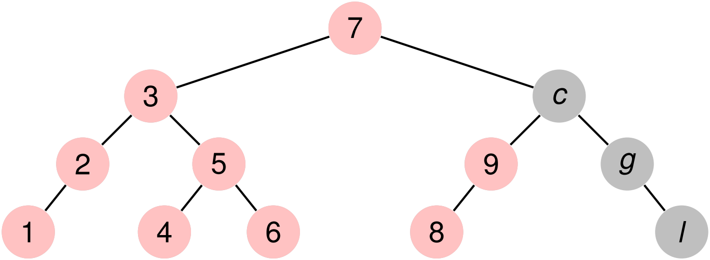
Ejemplo, recorrida in-order



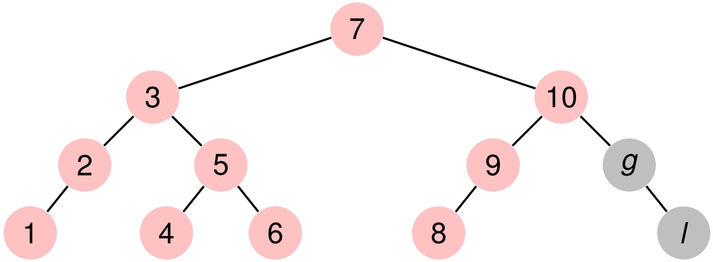
Ejemplo, recorrida in-order



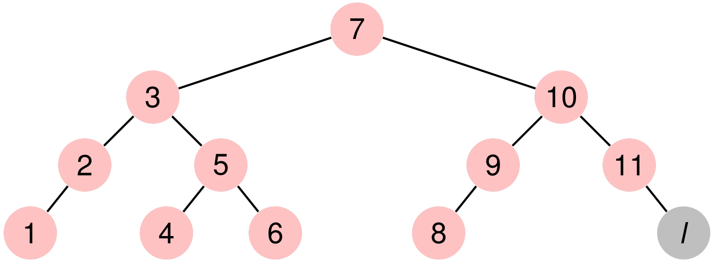
Ejemplo, recorrida in-order



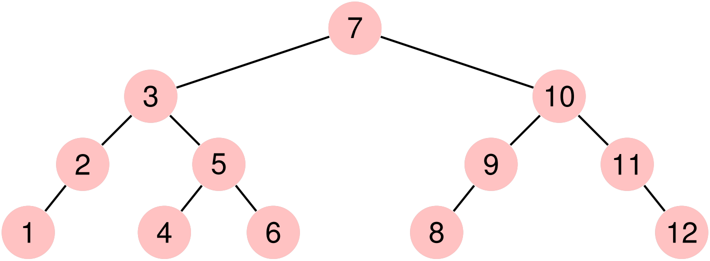
Ejemplo, recorrida in-order



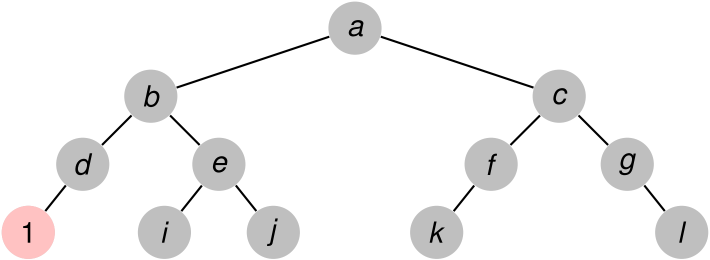
Ejemplo, recorrida in-order



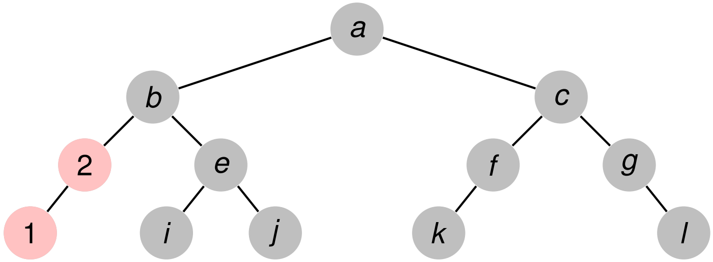
Ejemplo, recorrida in-order



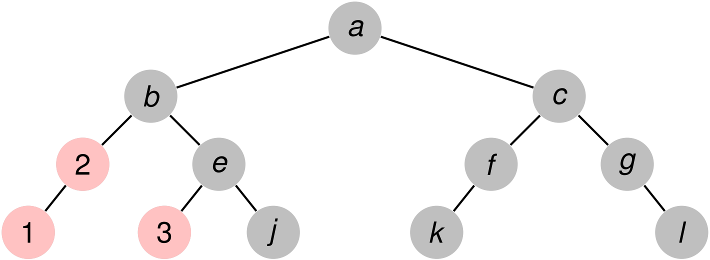
Ejemplo, recorrida pos-order



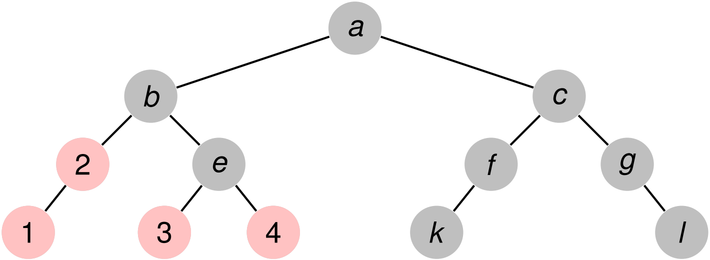
Ejemplo, recorrida pos-order



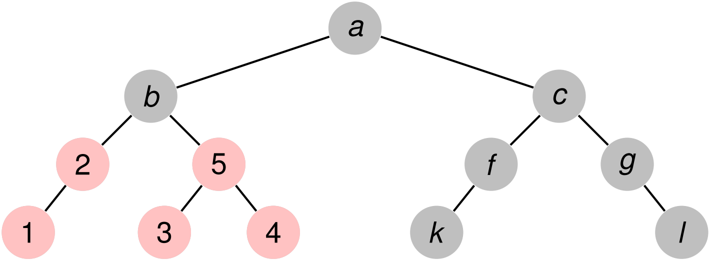
Ejemplo, recorrida pos-order



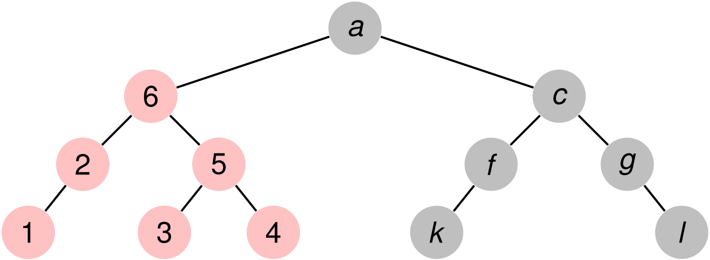
Ejemplo, recorrida pos-order



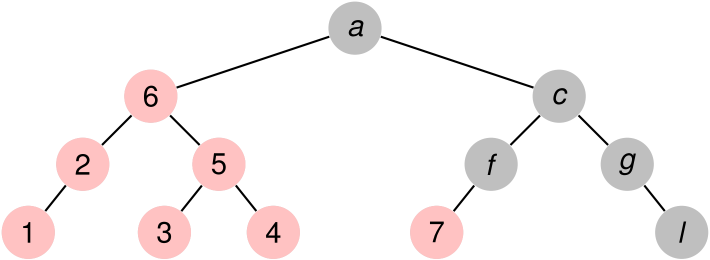
Ejemplo, recorrida pos-order



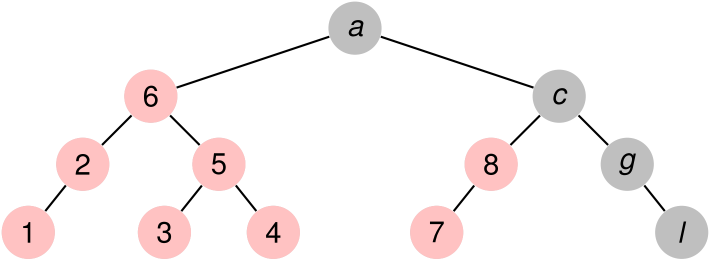
Ejemplo, recorrida pos-order



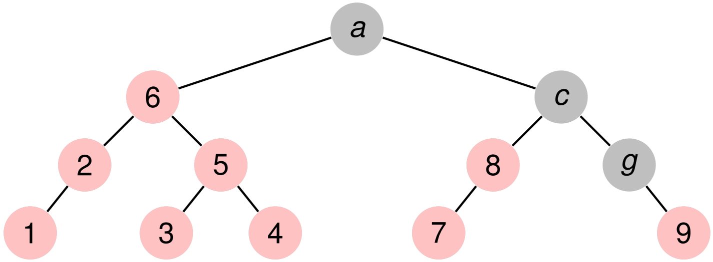
Ejemplo, recorrida pos-order



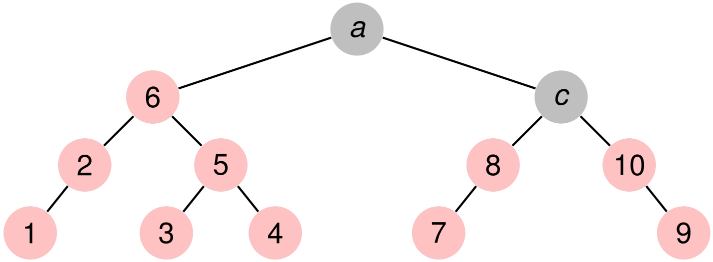
Ejemplo, recorrida pos-order



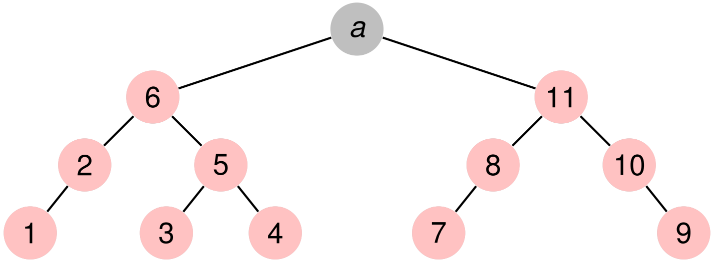
Ejemplo, recorrida pos-order



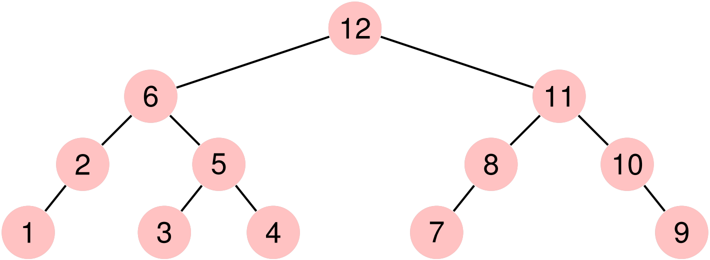
Ejemplo, recorrida pos-order



Ejemplo, recorrida pos-order



Ejemplo, recorrida pos-order

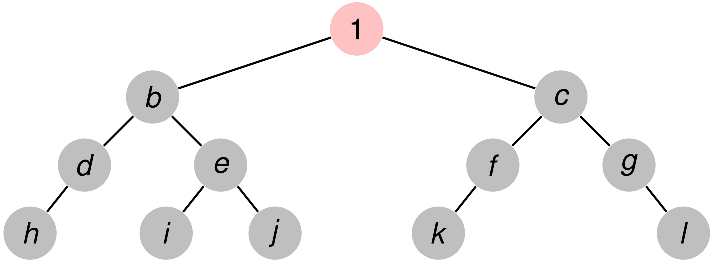


Otras 3 maneras de recorrer árboles binarios

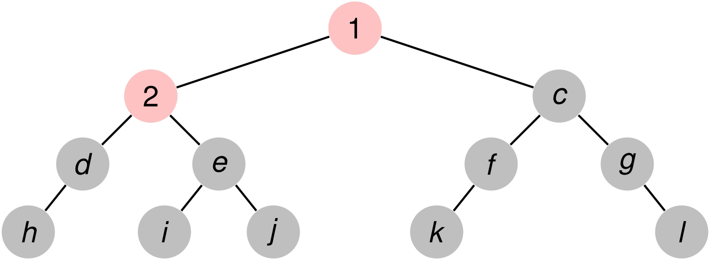
Hay otras tres maneras de recorrer: en cada una de las anteriores, intercambiar el orden entre las recorridas de los subárboles. Por ejemplo:

```
in_order_der_izqA Vacío = [ ]
in_order_der_izqA (Nodo i r d) =
    in_order_der_izqA d ++ (r : in_order_der_izqA i)
```

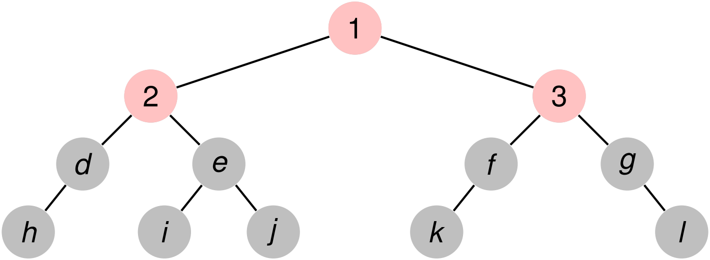
Otra manera más de recorrer árboles binarios



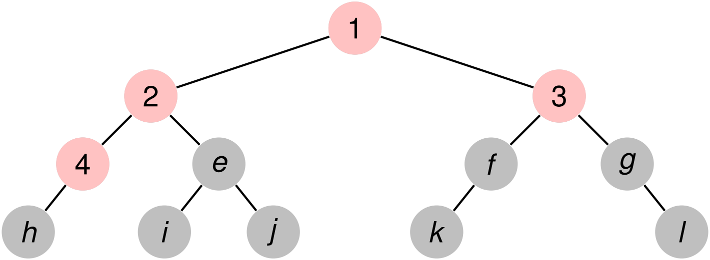
Otra manera más de recorrer árboles binarios



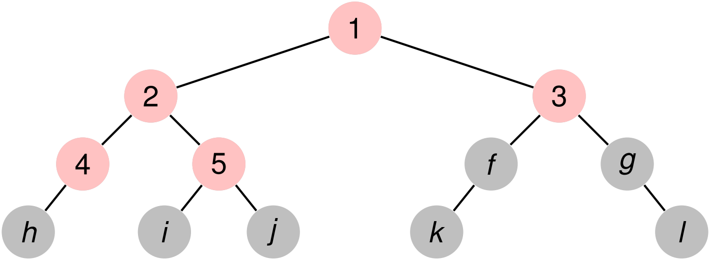
Otra manera más de recorrer árboles binarios



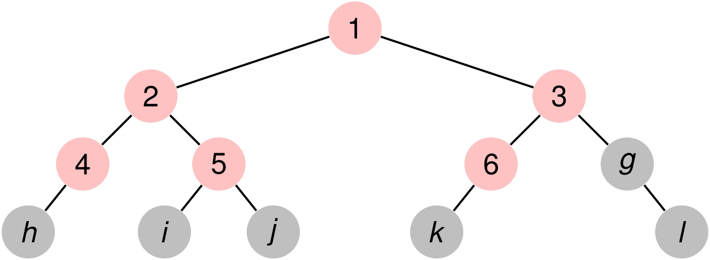
Otra manera más de recorrer árboles binarios



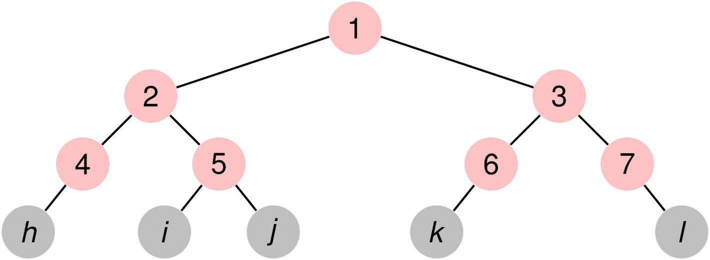
Otra manera más de recorrer árboles binarios



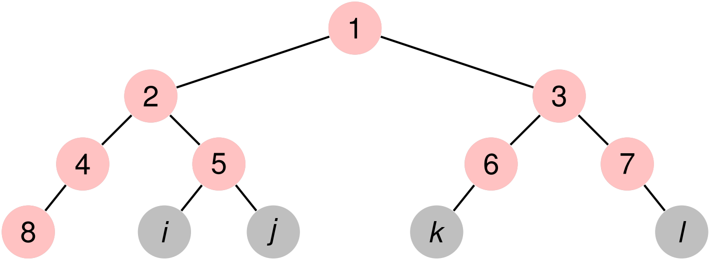
Otra manera más de recorrer árboles binarios



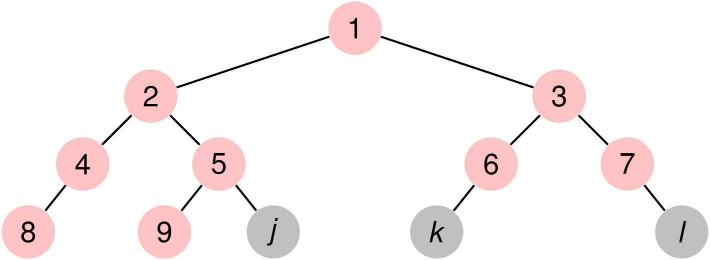
Otra manera más de recorrer árboles binarios



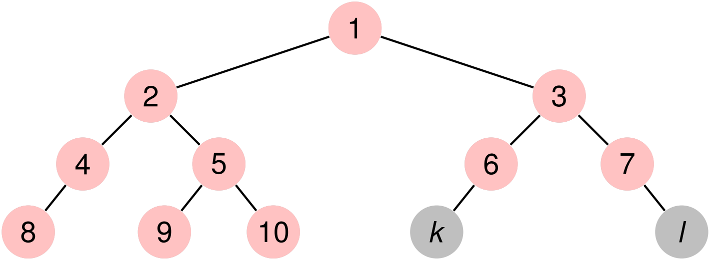
Otra manera más de recorrer árboles binarios



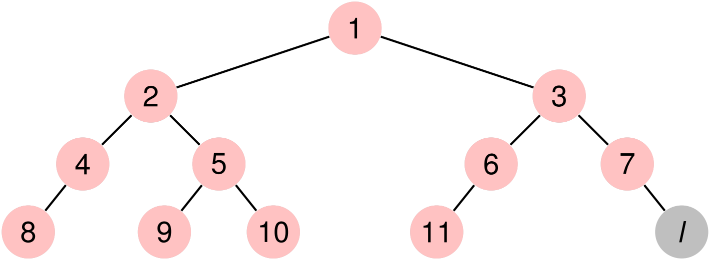
Otra manera más de recorrer árboles binarios



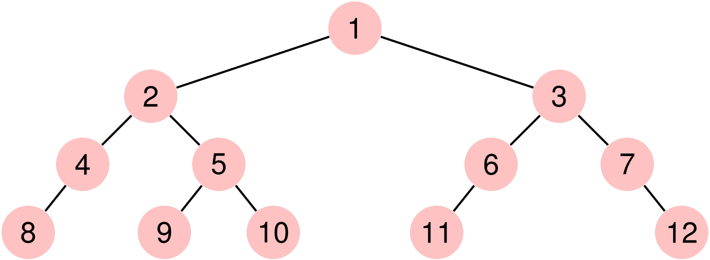
Otra manera más de recorrer árboles binarios



Otra manera más de recorrer árboles binarios



Otra manera más de recorrer árboles binarios



Otra manera más de recorrer árboles binarios

Algunas observaciones:

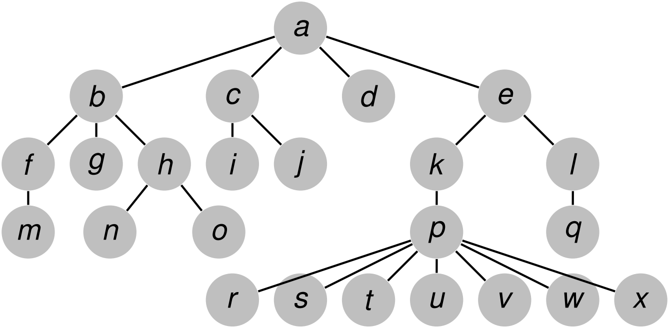
- salvo la última, todas las formas anteriores de recorrer, primero recorren **en profundidad**
- la última que presentamos, no,
- recorre **a lo ancho**.
- Todas las otras son ejemplo de DFS (Depth-first search).
- La última es ejemplo de BFS (Breadth-first search).
- Un programa que recorra en BFS es más difícil de escribir, se verá al final de la clase de hoy.

Clase de hoy

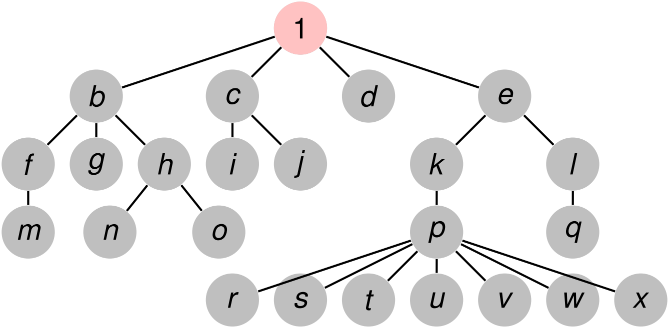
Recorrida de árboles finitarios

- Son árboles en los que cada vértice tiene una cantidad finita (pero puede ser variable) de hijos.
- La recorrida in-order deja de tener sentido (habiendo más de dos hijos, ¿en qué momento habría que visitar el elemento que se encuentra en la raíz?).
- Las recorridas pre-order y pos-order (DFS) y BFS siguen teniendo sentido.

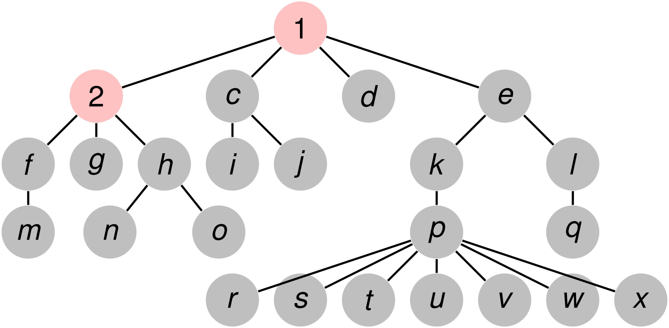
Ejemplo de árbol finitario



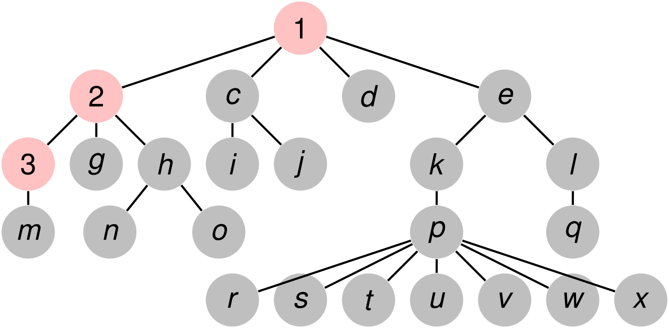
Ejemplo, recorrida pre-order



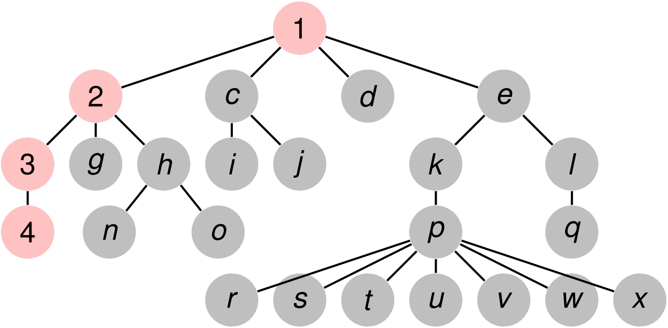
Ejemplo, recorrida pre-order



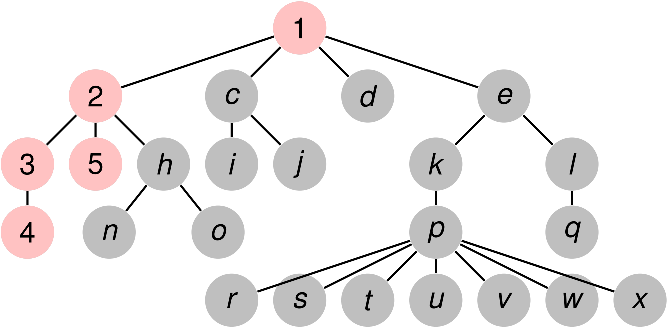
Ejemplo, recorrida pre-order



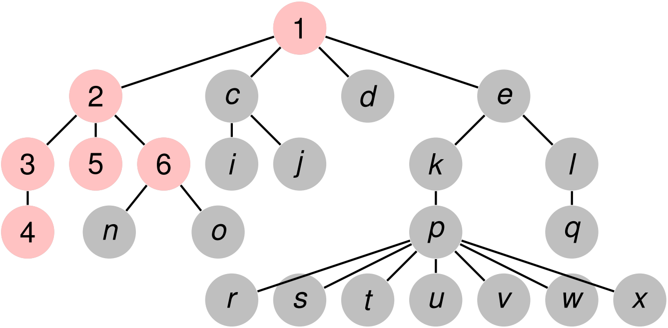
Ejemplo, recorrida pre-order



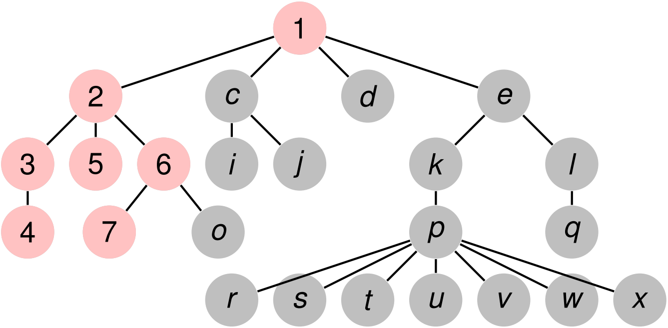
Ejemplo, recorrida pre-order



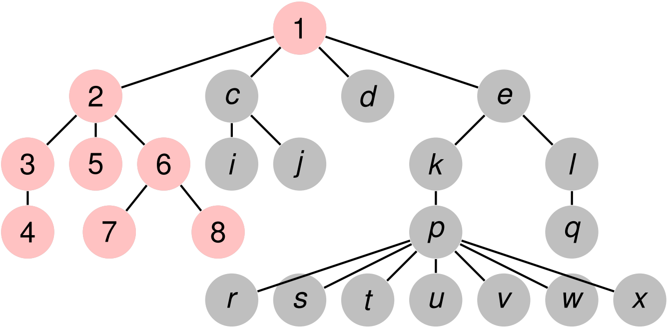
Ejemplo, recorrida pre-order



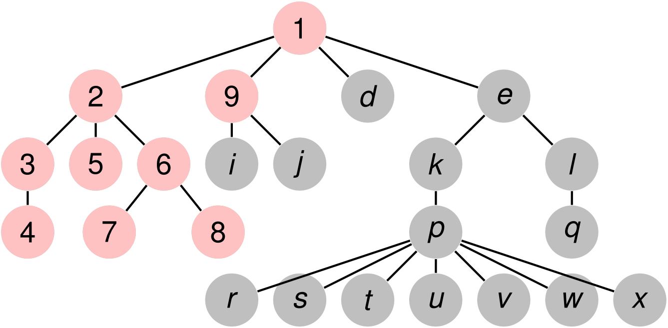
Ejemplo, recorrida pre-order



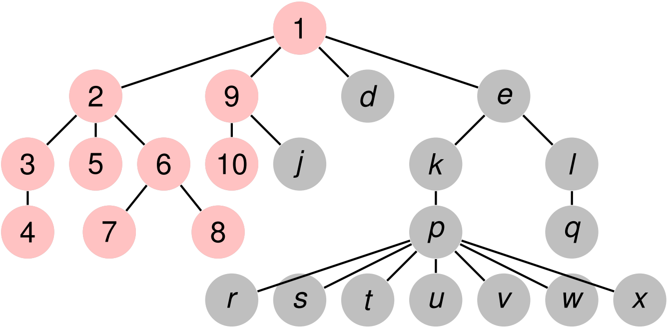
Ejemplo, recorrida pre-order



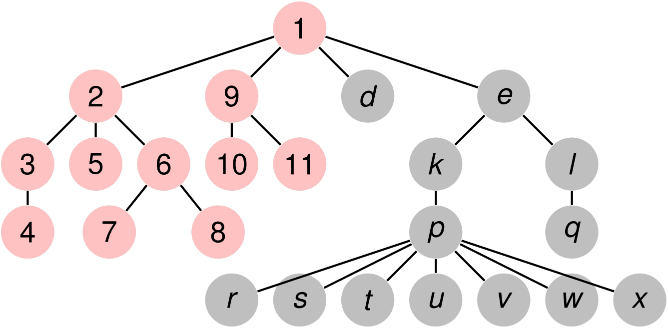
Ejemplo, recorrida pre-order



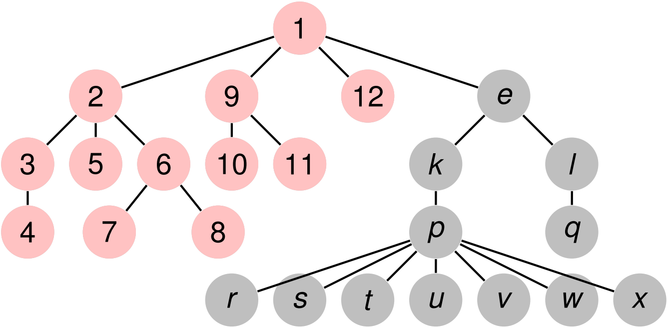
Ejemplo, recorrida pre-order



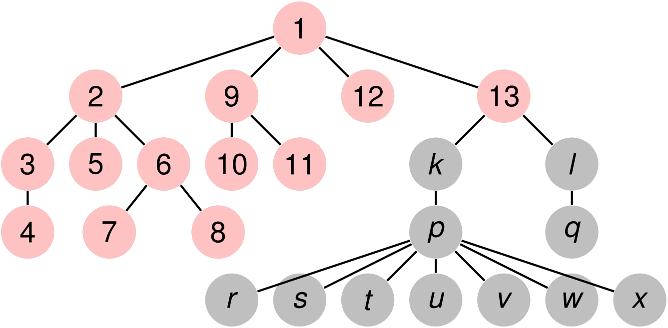
Ejemplo, recorrida pre-order



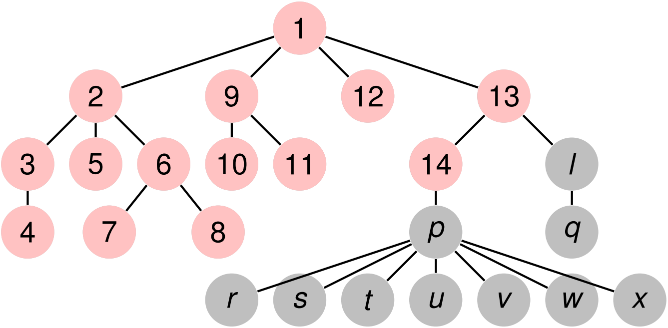
Ejemplo, recorrida pre-order



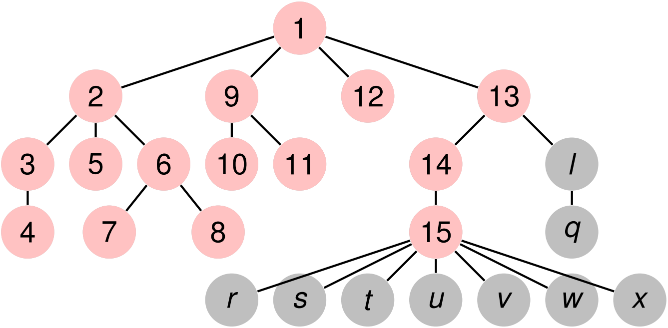
Ejemplo, recorrida pre-order



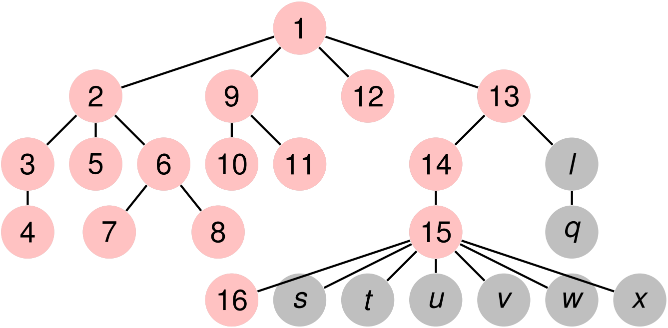
Ejemplo, recorrida pre-order



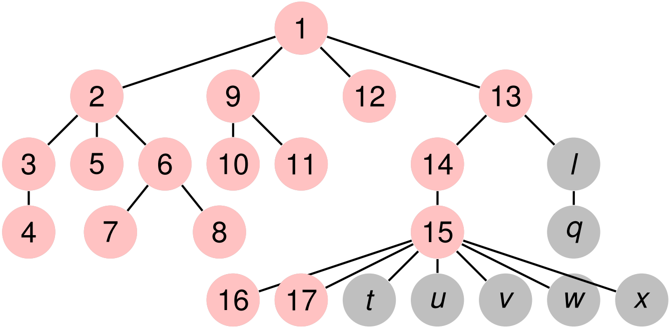
Ejemplo, recorrida pre-order



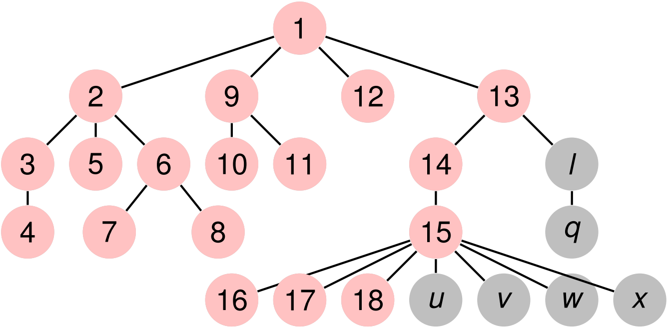
Ejemplo, recorrida pre-order



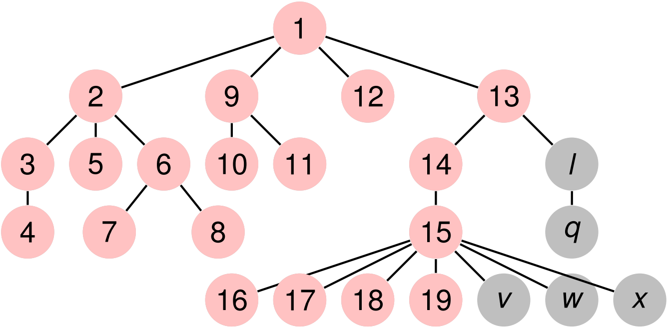
Ejemplo, recorrida pre-order



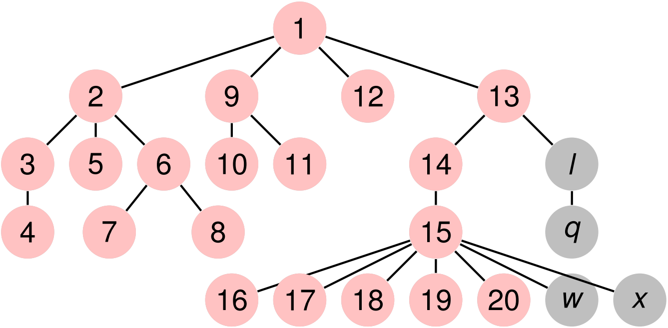
Ejemplo, recorrida pre-order



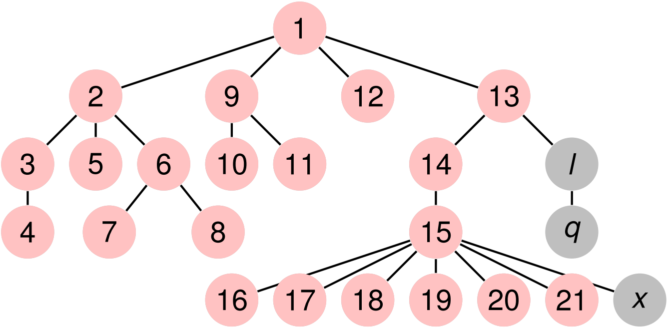
Ejemplo, recorrida pre-order



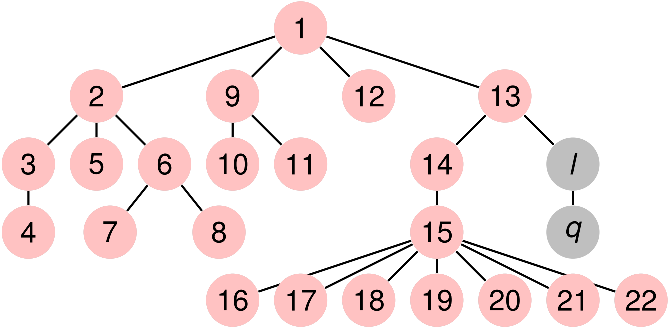
Ejemplo, recorrida pre-order



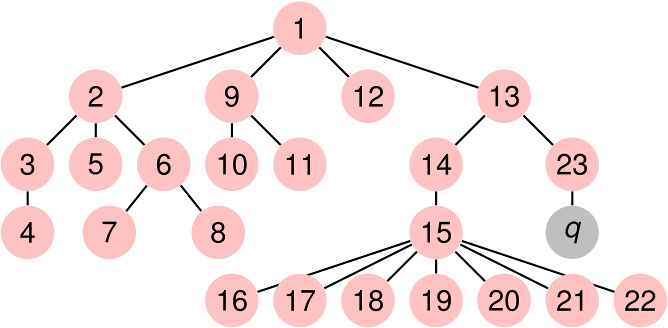
Ejemplo, recorrida pre-order



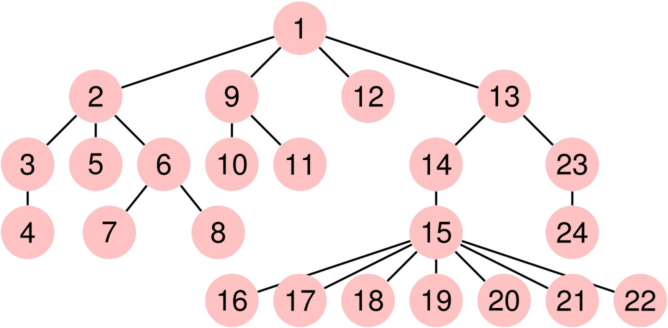
Ejemplo, recorrida pre-order



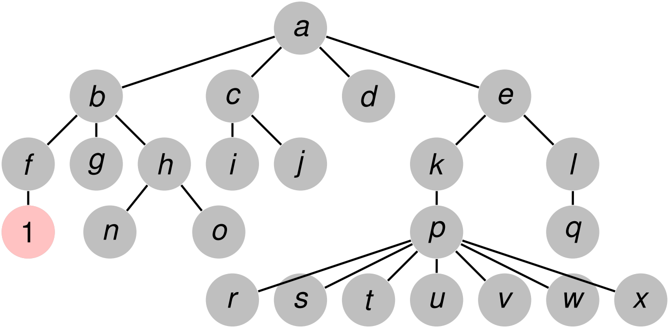
Ejemplo, recorrida pre-order



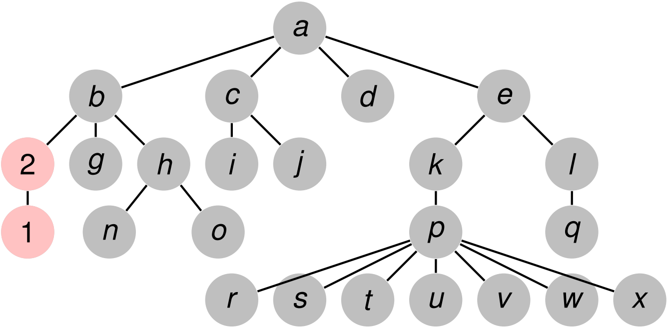
Ejemplo, recorrida pre-order



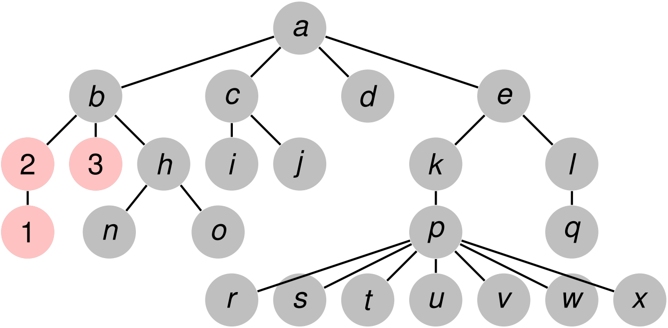
Ejemplo, recorrida pos-order



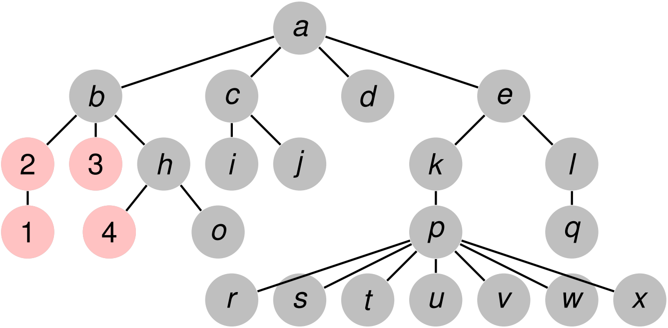
Ejemplo, recorrida pos-order



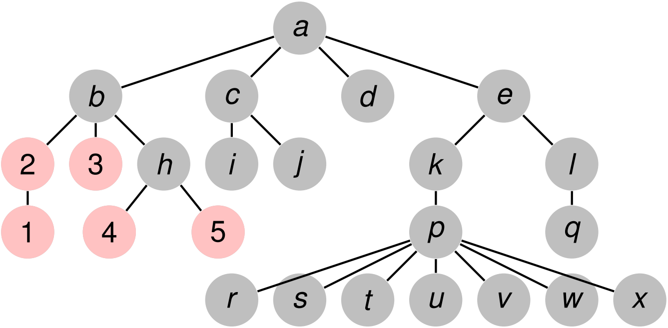
Ejemplo, recorrida pos-order



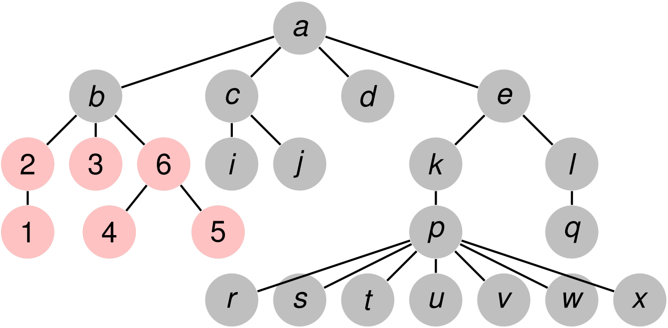
Ejemplo, recorrida pos-order



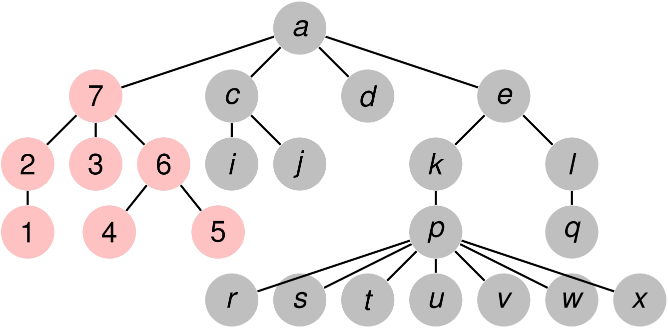
Ejemplo, recorrida pos-order



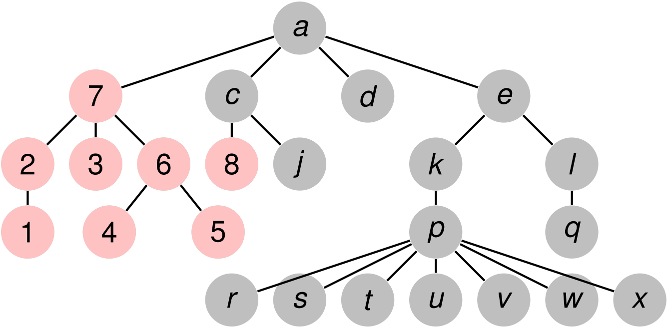
Ejemplo, recorrida pos-order



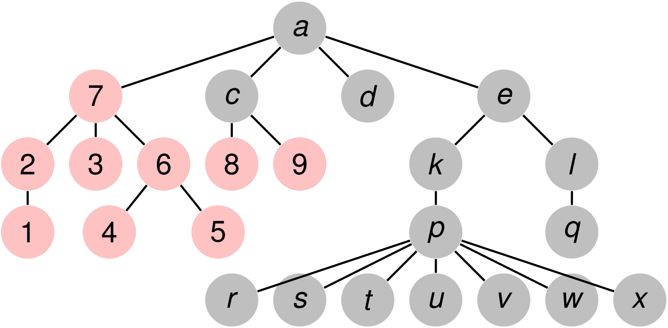
Ejemplo, recorrida pos-order



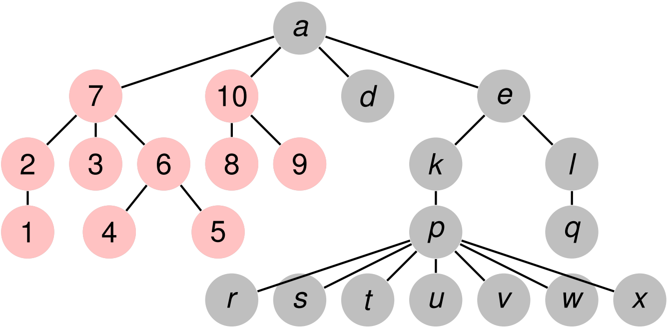
Ejemplo, recorrida pos-order



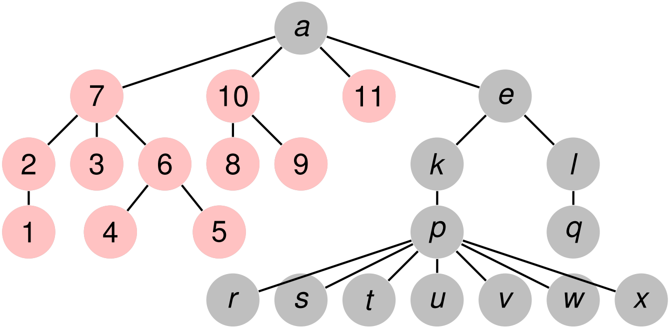
Ejemplo, recorrida pos-order



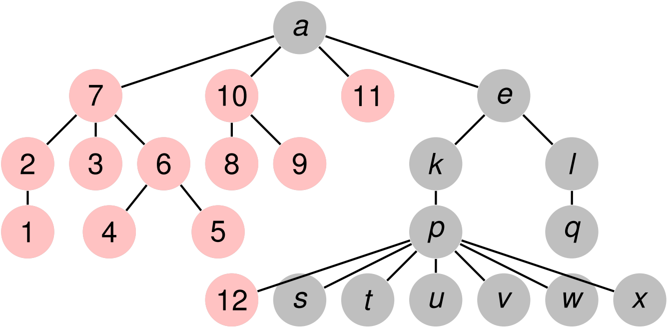
Ejemplo, recorrida pos-order



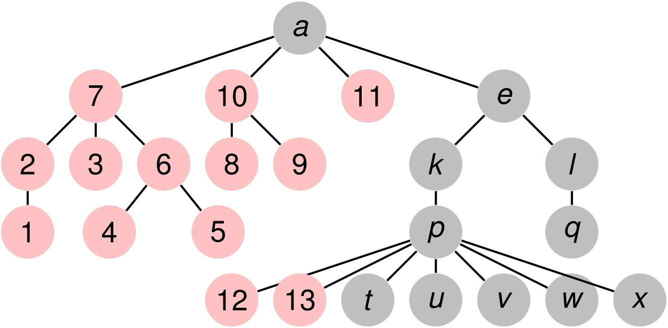
Ejemplo, recorrida pos-order



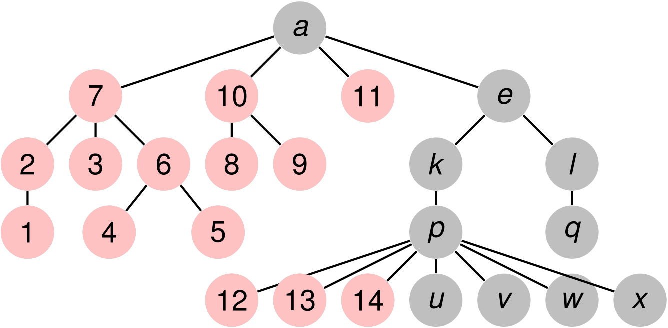
Ejemplo, recorrida pos-order



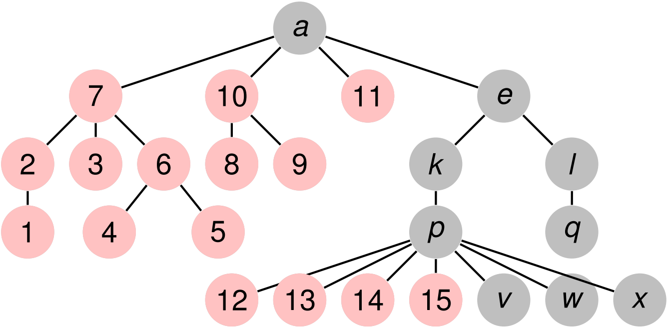
Ejemplo, recorrida pos-order



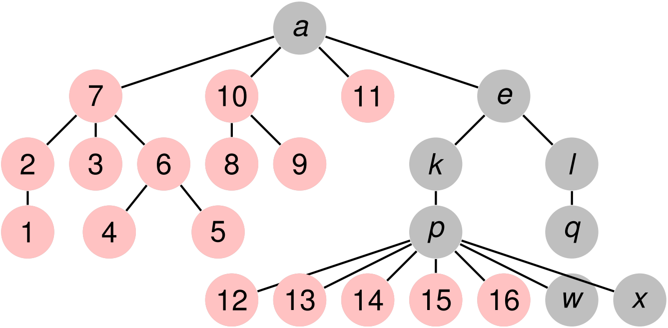
Ejemplo, recorrida pos-order



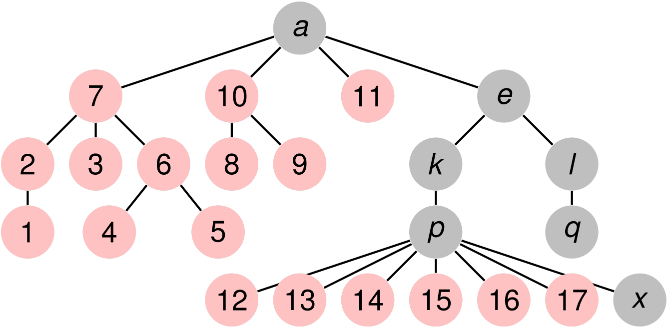
Ejemplo, recorrida pos-order



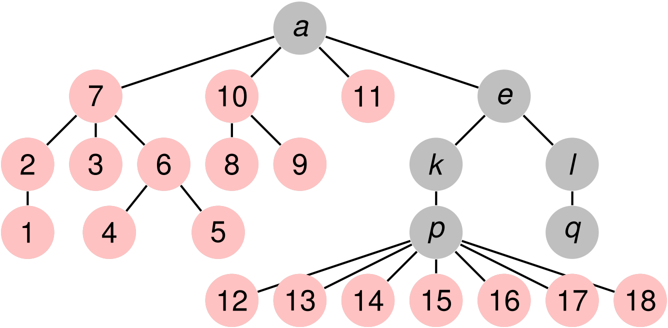
Ejemplo, recorrida pos-order



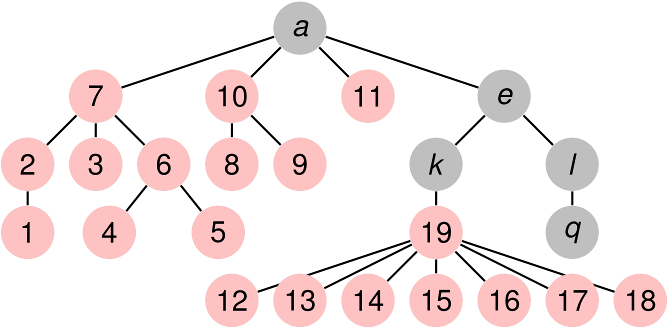
Ejemplo, recorrida pos-order



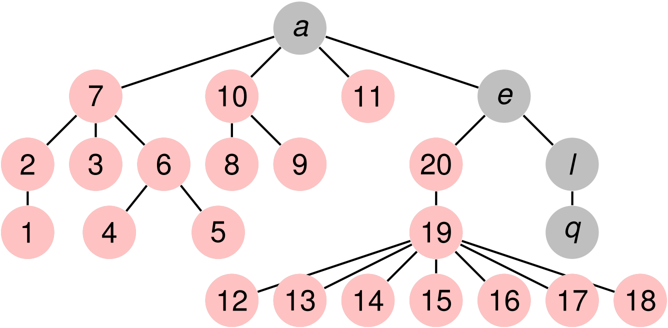
Ejemplo, recorrida pos-order



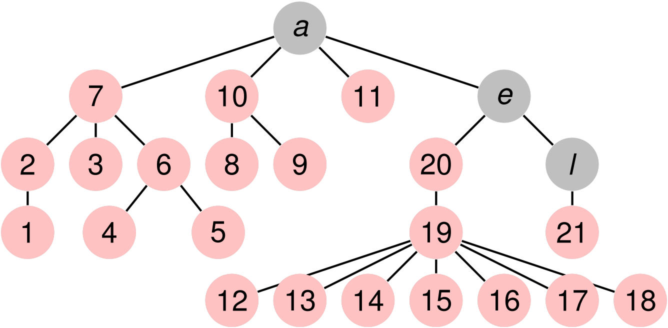
Ejemplo, recorrida pos-order



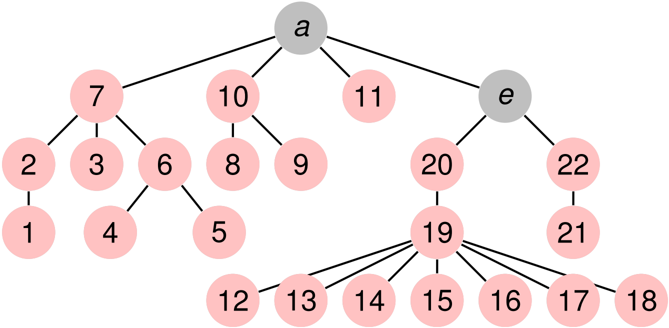
Ejemplo, recorrida pos-order



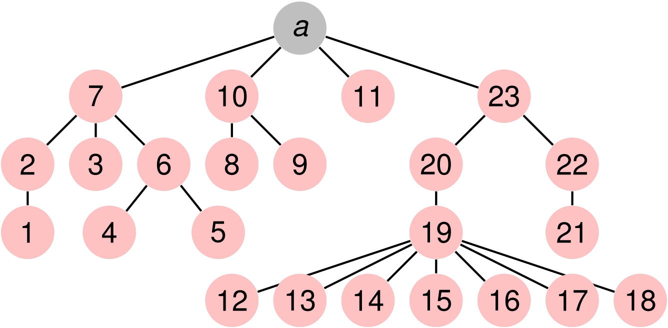
Ejemplo, recorrida pos-order



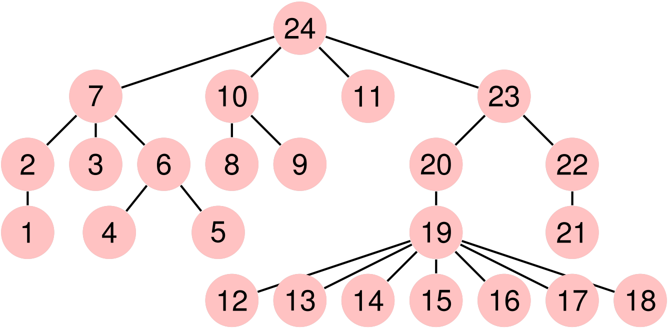
Ejemplo, recorrida pos-order



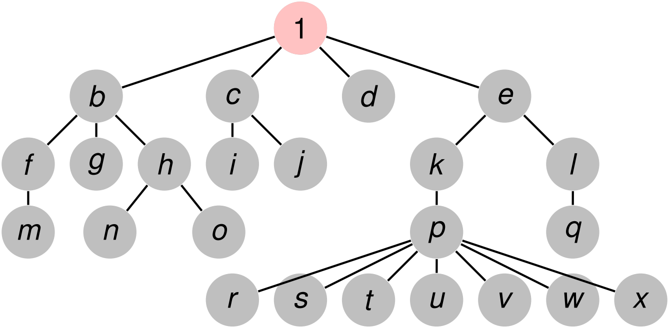
Ejemplo, recorrida pos-order



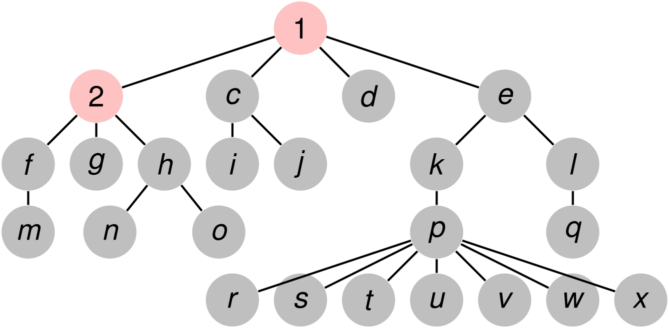
Ejemplo, recorrida pos-order



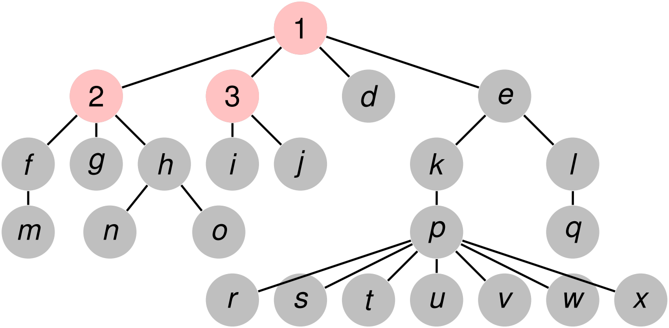
Ejemplo, recorrida BFS



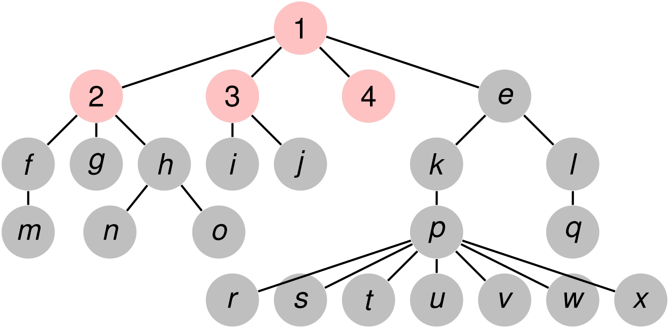
Ejemplo, recorrida BFS



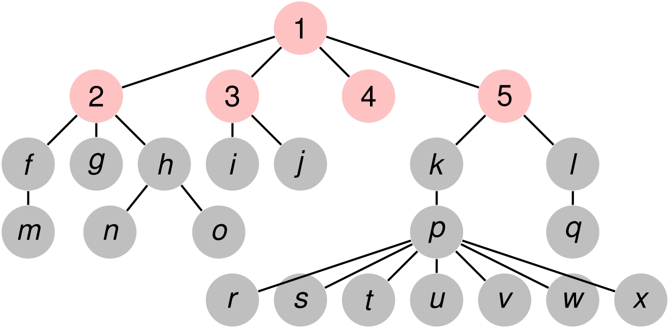
Ejemplo, recorrida BFS



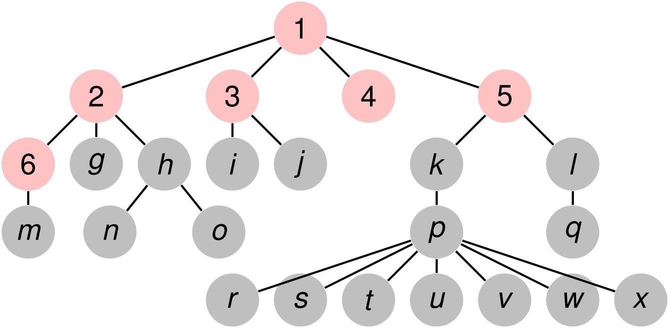
Ejemplo, recorrida BFS



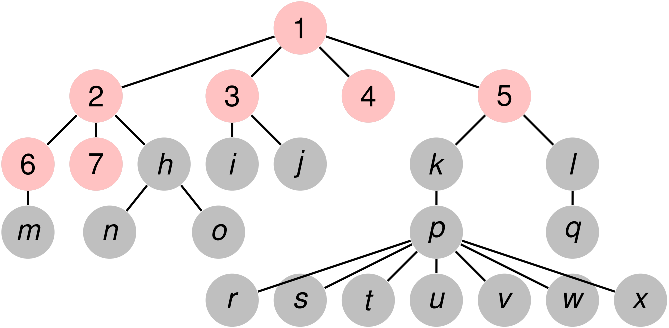
Ejemplo, recorrida BFS



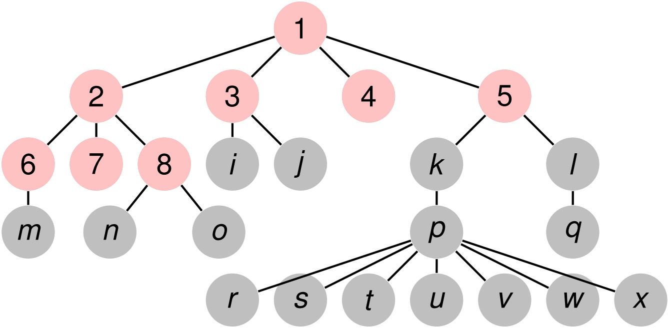
Ejemplo, recorrida BFS



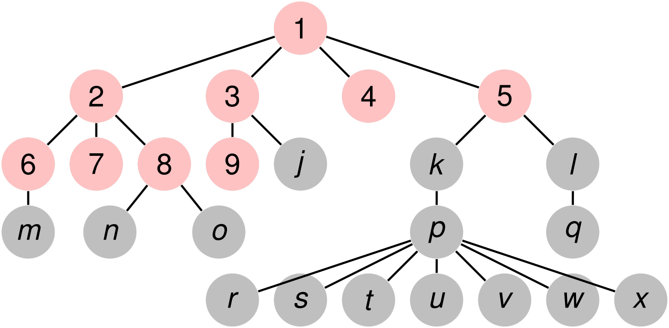
Ejemplo, recorrida BFS



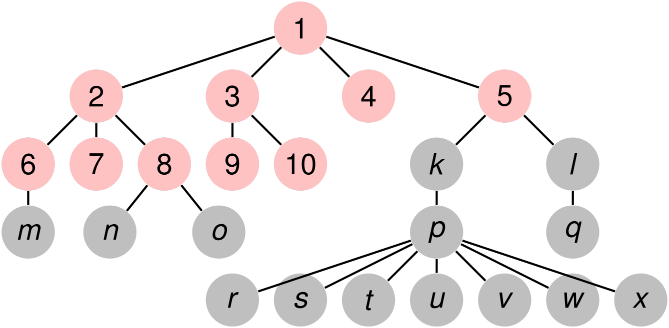
Ejemplo, recorrida BFS



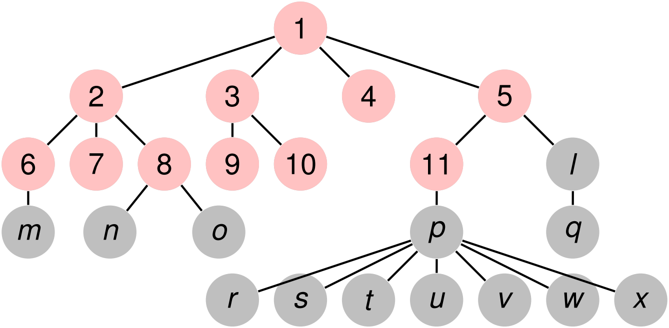
Ejemplo, recorrida BFS



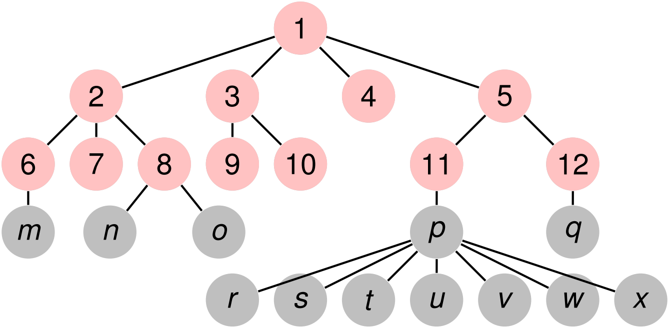
Ejemplo, recorrida BFS



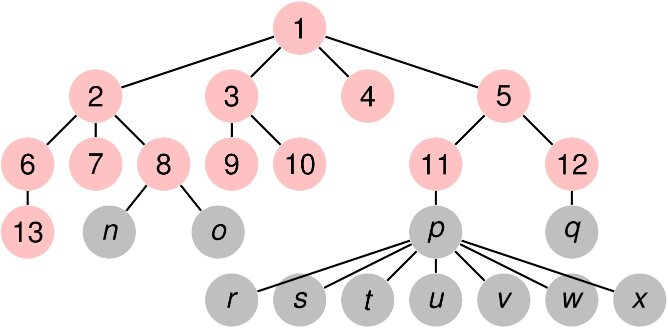
Ejemplo, recorrida BFS



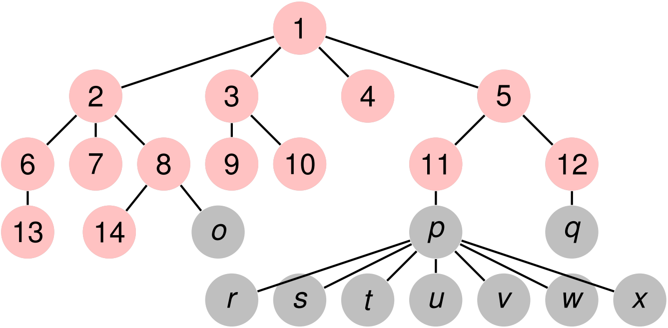
Ejemplo, recorrida BFS



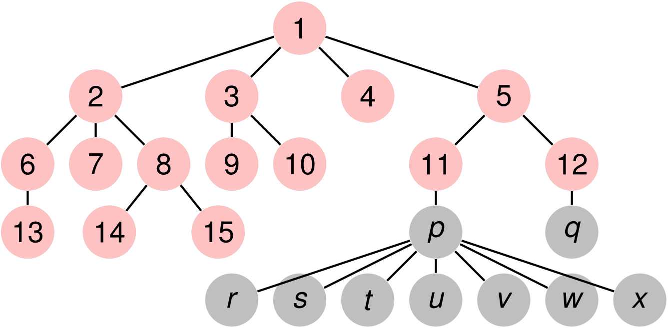
Ejemplo, recorrida BFS



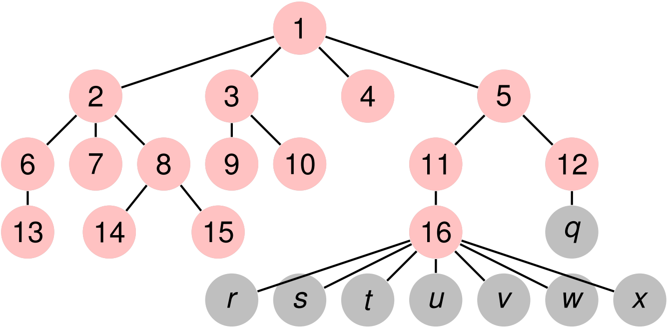
Ejemplo, recorrida BFS



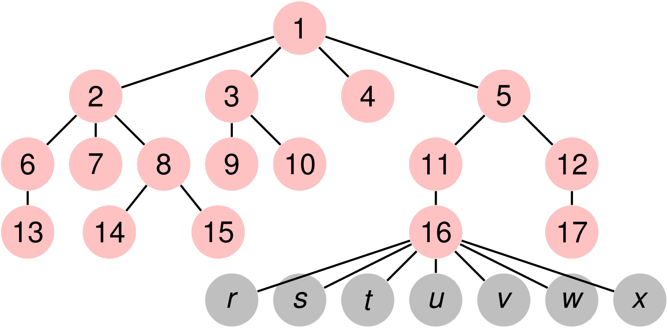
Ejemplo, recorrida BFS



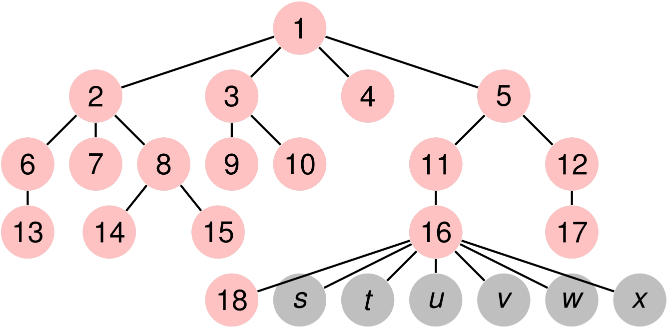
Ejemplo, recorrida BFS



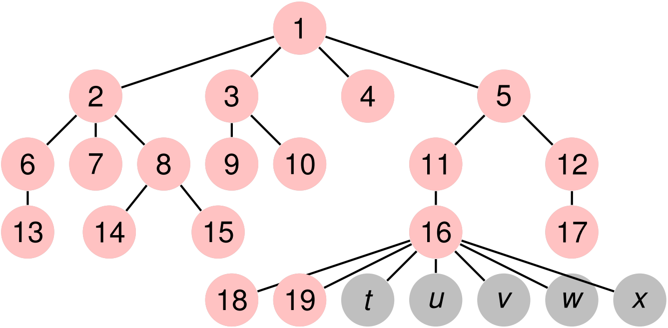
Ejemplo, recorrida BFS



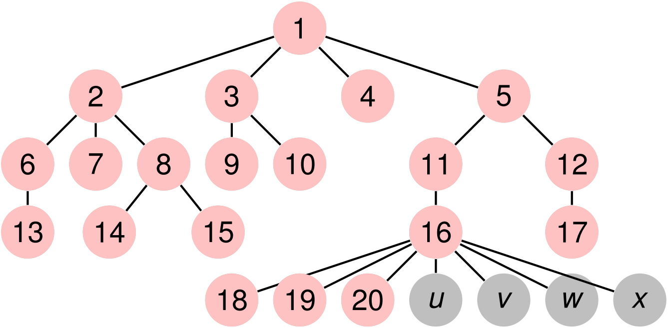
Ejemplo, recorrida BFS



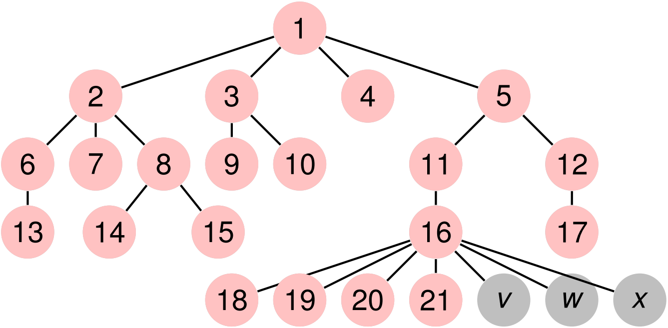
Ejemplo, recorrida BFS



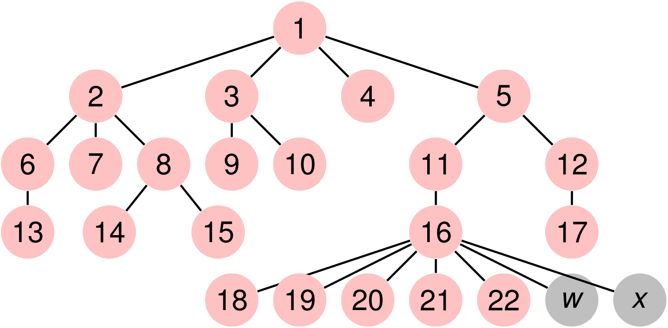
Ejemplo, recorrida BFS



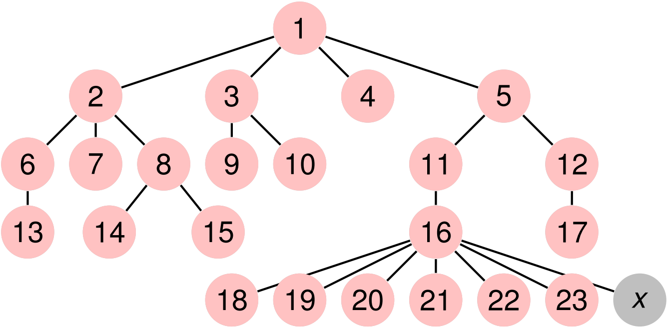
Ejemplo, recorrida BFS



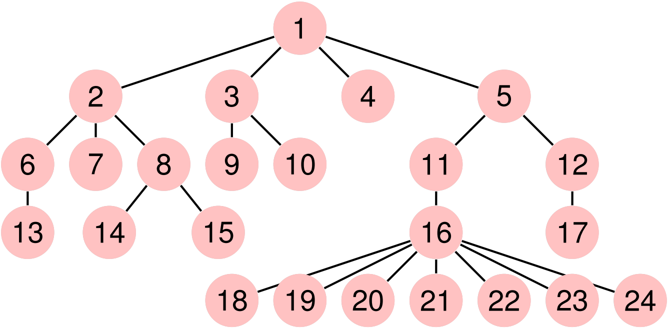
Ejemplo, recorrida BFS



Ejemplo, recorrida BFS



Ejemplo, recorrida BFS



Algoritmos
Marcas

Cuando se visita un vértice, se marca con un número positivo.

```
type tmark = tuple
                ord: array[V] of nat
                cont: nat
             end
proc init(out mark: tmark)
    mark.cont:= 0
end
proc visit(in/out mark: tmark, in v: V)
    mark.cont:= mark.cont+1
    mark.ord[v]:= mark.cont
end
```

Algoritmos
pre-order

Asumimos que un árbol viene dado por su raíz (root) y una función (children) que devuelve (el conjunto o la lista de) los hijos de cada vértice.

fun pre_order(G=(V,root,children)) **ret** mark: tmark
    init(mark)
    pre_traverse(G, mark, root)
end

proc pre_traverse(**in** G, **in/out** mark: tmark, **in** v: V)
    visit(mark,v)
    for w $\in$ children(v) **do** pre_traverse(G, mark, w) **od**
end

Algoritmos

pos-order

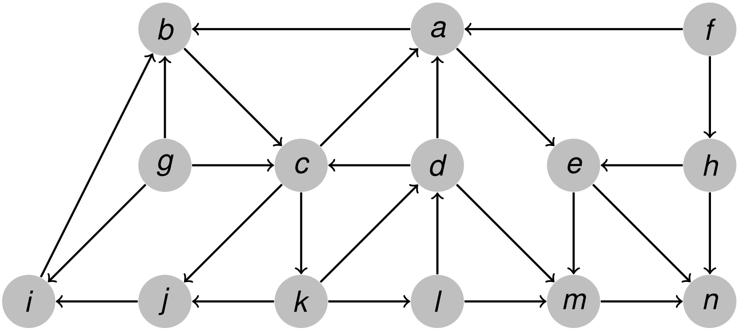
fun pos_order(G=(V,root,children)) **ret** mark: tmark
    init(mark)
    pos_traverse(G, mark, root)
end

proc pos_traverse(**in** G, **in**/**out** mark: tmark, **in** v: V)
    for w $\in$ children(v) **do** pos_traverse(G, mark, w) **od**
    visit(mark,v)
end

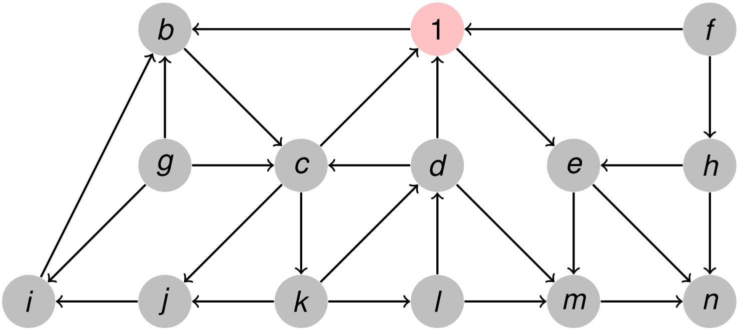
Clase de hoy

1. Repaso
2. Recorrida de grafos
   - Generalidades
   - Árboles binarios
   - Árboles finitarios
   - Grafos arbitrarios, DFS
   - Grafos arbitrarios, BFS

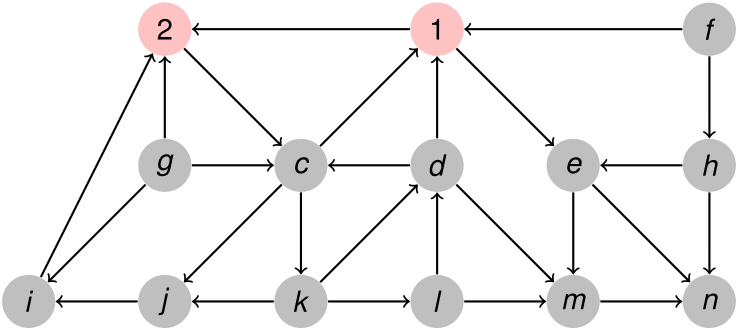
Ejemplo de grafo



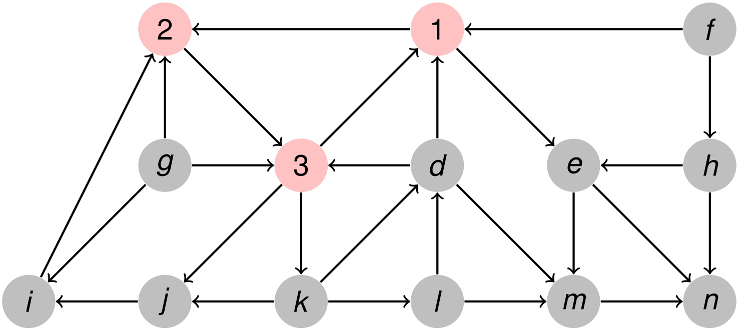
Ejemplo, DFS en pre-order



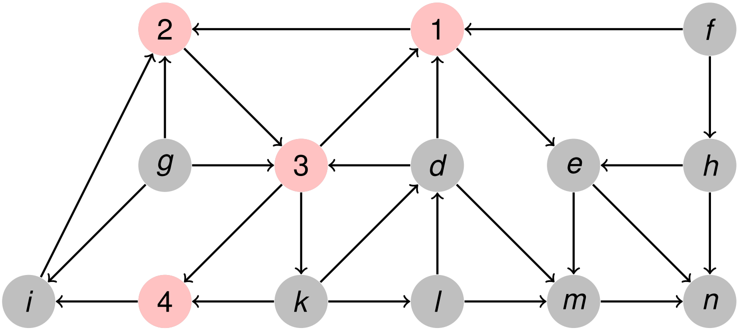
Ejemplo, DFS en pre-order



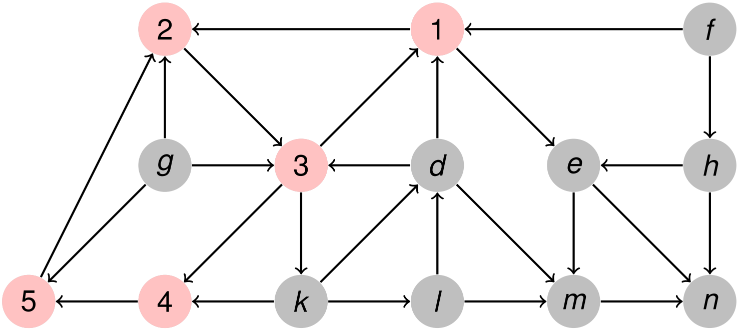
Ejemplo, DFS en pre-order



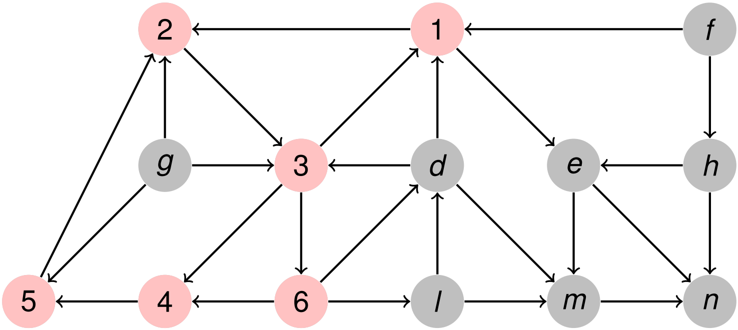
Ejemplo, DFS en pre-order



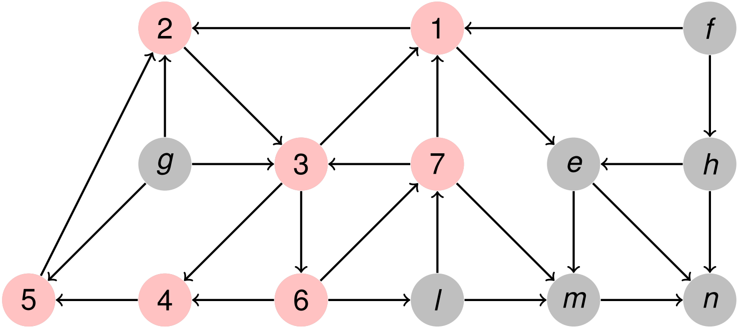
Ejemplo, DFS en pre-order



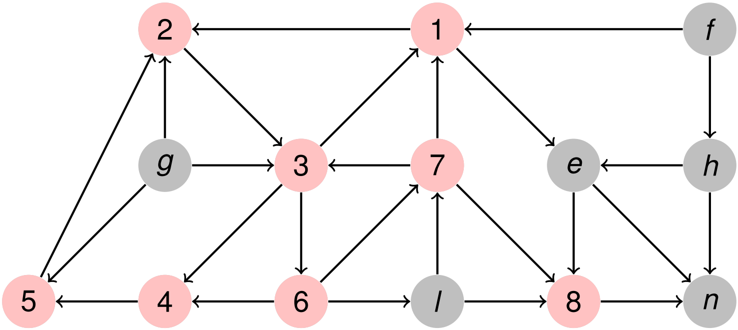
Ejemplo, DFS en pre-order



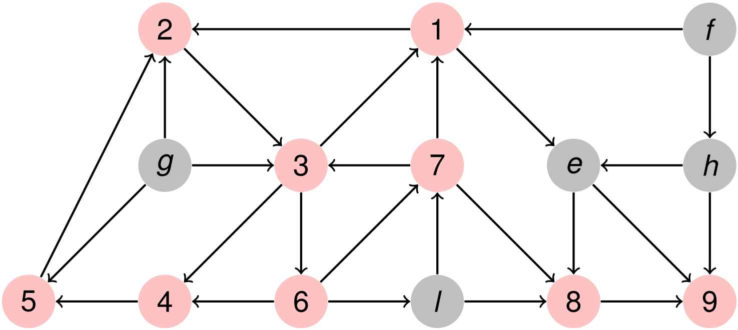
Ejemplo, DFS en pre-order



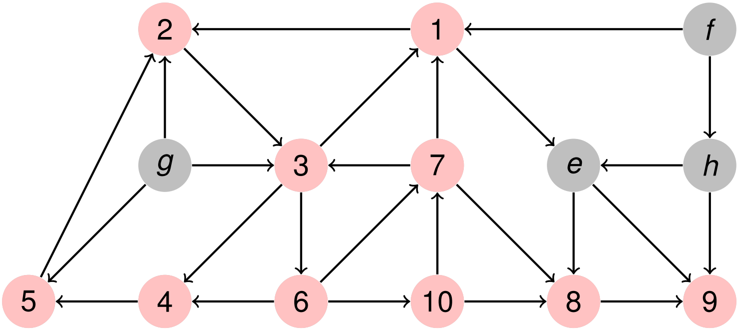
Ejemplo, DFS en pre-order



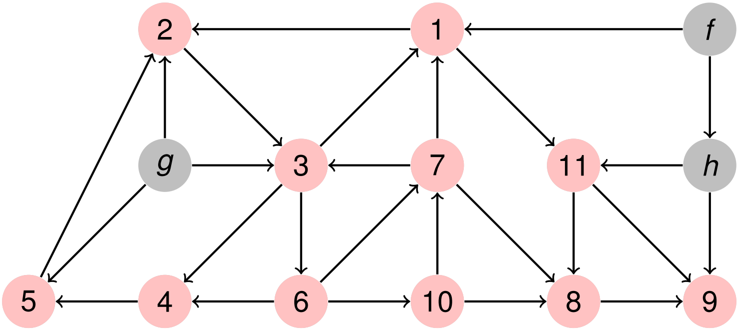
Ejemplo, DFS en pre-order



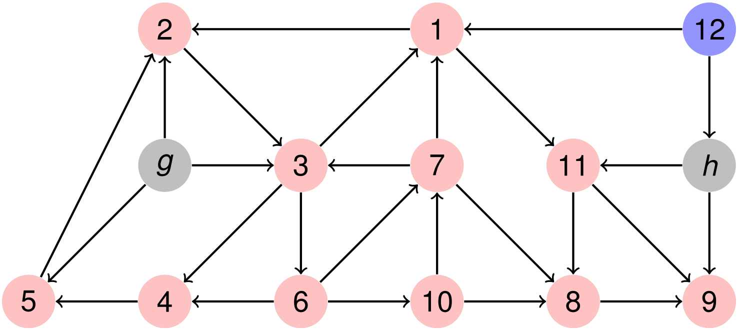
Ejemplo, DFS en pre-order



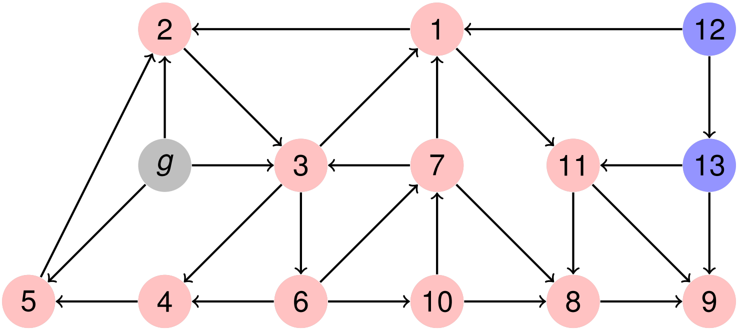
Ejemplo, DFS en pre-order



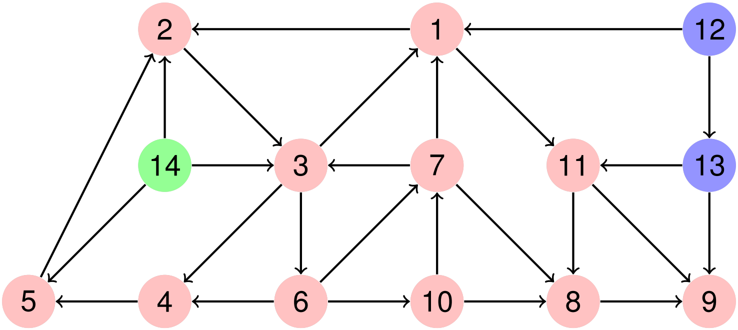
Ejemplo, DFS en pre-order



Ejemplo, DFS en pre-order



Ejemplo, DFS en pre-order



Algoritmos
Marcas

Como ahora puede haber ciclos, es necesario poder averiguar si un vértice ya fue visitado.

proc init(**out** mark: tmark)
    mark.cont:= 0
    for v $\in$ V **do** mark.ord[v]:= 0 **od**
end

fun visited(mark: tmark, v: V) **ret** b: **bool**
    b:= (mark.ord[v] $\neq$ 0)
end

Algoritmo DFS

```
fun dfs(G=(V,neighbours)) ret mark: tmark
   init(mark)
   for v ∈ V do
      if ¬visited(mark,v) then dfsearch(G, mark, v) fi
   od
end

proc dfsearch(in G, in/out mark: tmark, in v: V)
    visit(mark,v)
    for w ∈ neighbours(v) do
       if ¬visited(mark,w) then dfsearch(G, mark, w) fi
    od
end
```

DFS iterativo

Introducimos una pila para evitar recursión

```
proc dfsearch(in G, in/out mark: tmark, in v: V)
    var p: stack of V
    empty(p)
    visit(mark,v)
    push(v,p)
    while ¬is_empty(p) do
        if existe w ∈ neighbours(top(p)) tal que ¬visited(mark,w) then
            visit(mark,w)
            push(w,p)
        else pop(p)
        fi
    od
end
```

Clase de hoy

1. Repaso
2. Recorrida de grafos
   - Generalidades
   - Árboles binarios
   - Árboles finitarios
   - Grafos arbitrarios, DFS
   - Grafos arbitrarios, BFS

BFS

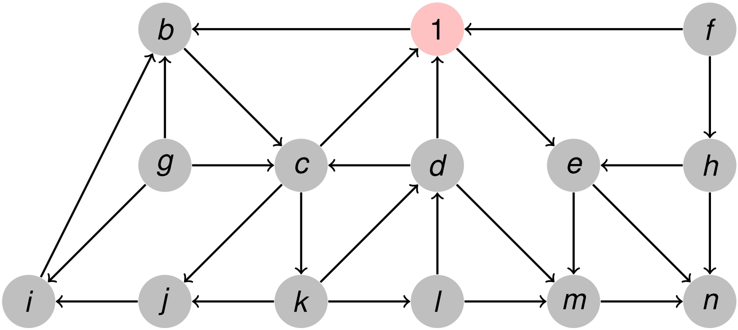
Si cambiamos la pila por una cola obtenemos BFS

```
proc bfsearch(in G, in/out mark: tmark, in v: V)
     var q: queue of V
     empty(q)
     visit(mark,v)
     enqueue(q,v)
     while ¬is_empty(q) do
         if existe w ∈ neighbours(first(q)) tal que ¬visited(mark,w) then
           visit(mark,w)
           enqueue(q,w)
         else dequeue(q)
         fi
     od
end
```

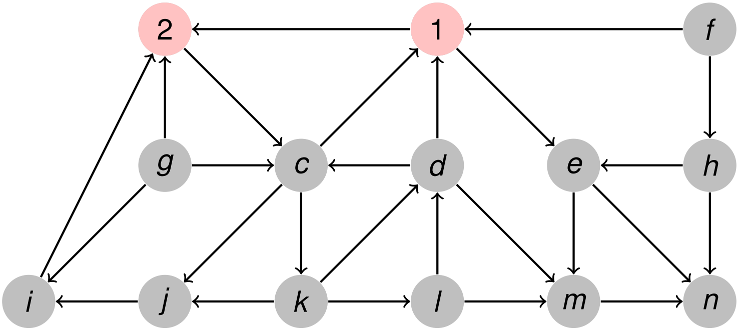
BFS, procedimiento principal

```
fun bfs(G=(V,neighbours)) ret mark: tmark
    init(mark)
    for v ∈ V do
        if ¬visited(mark,v) then bfsearch(G, mark, v) fi
    od
end
```

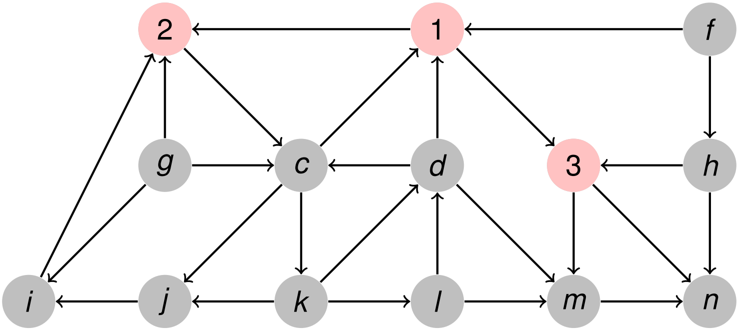
Ejemplo, BFS



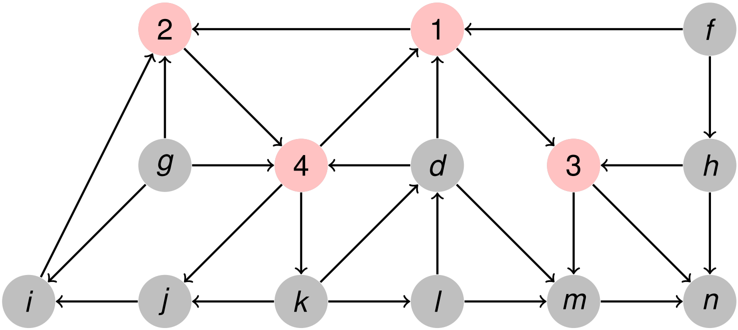
Ejemplo, BFS



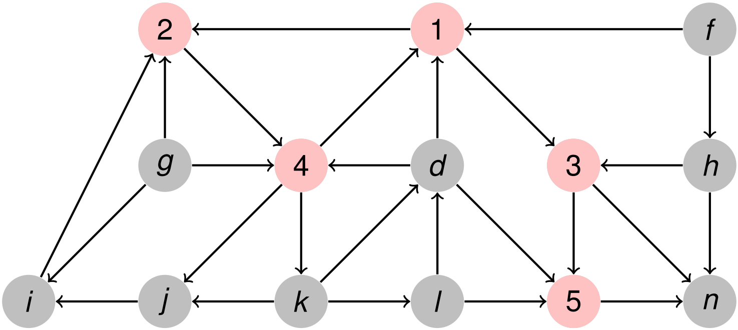
Ejemplo, BFS



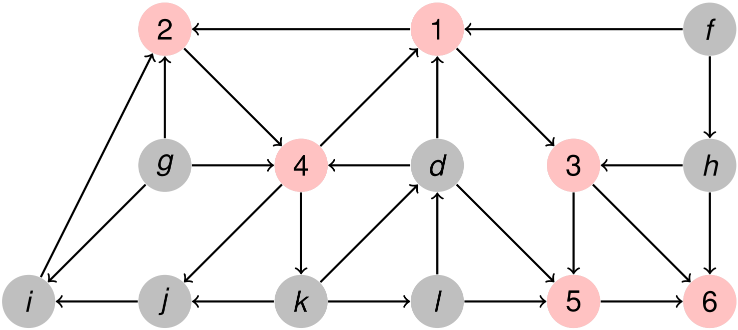
Ejemplo, BFS



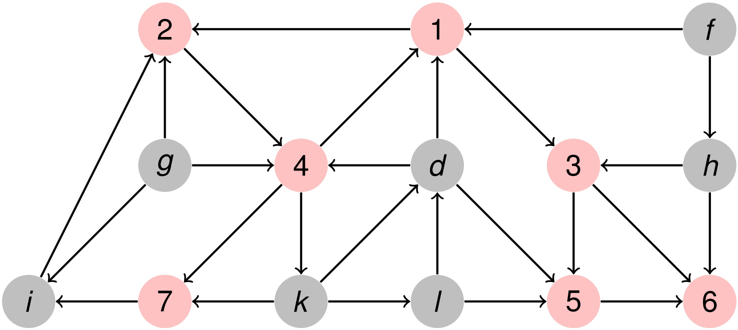
Ejemplo, BFS



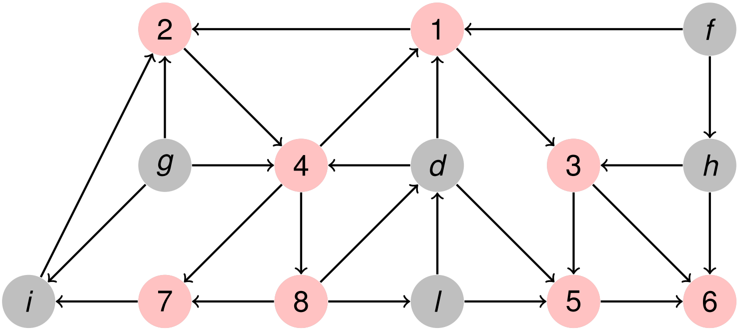
Ejemplo, BFS



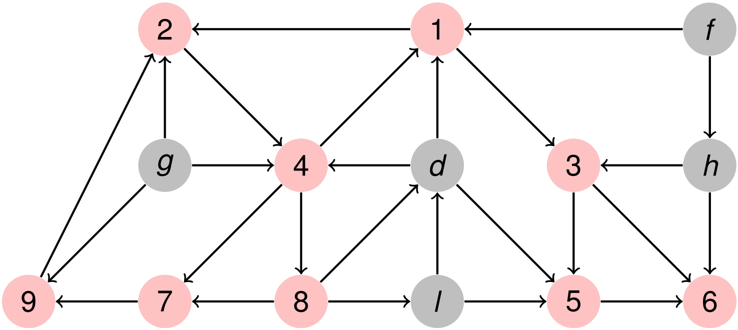
Ejemplo, BFS



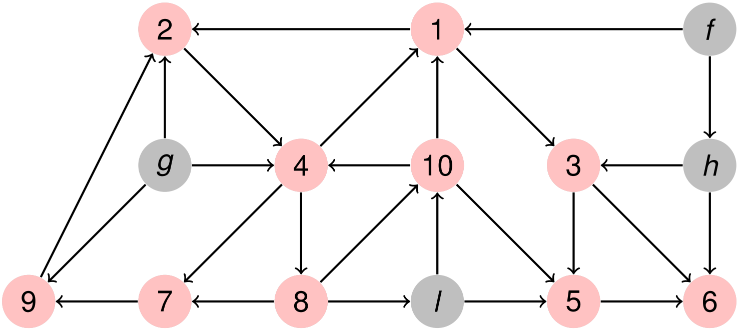
Ejemplo, BFS



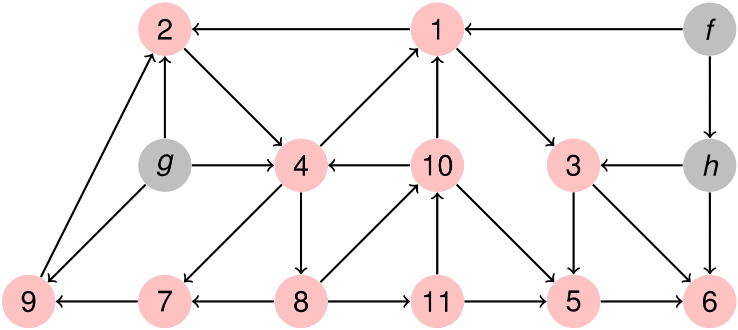
Ejemplo, BFS



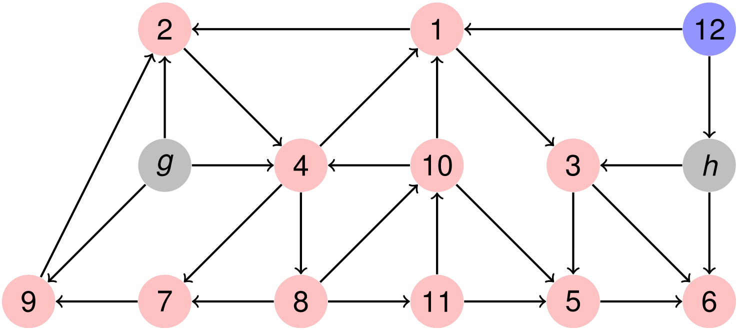
Ejemplo, BFS



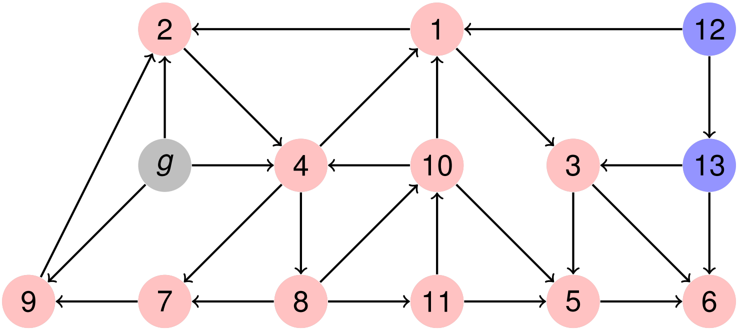
Ejemplo, BFS



Ejemplo, BFS



Ejemplo, BFS



Ejemplo, BFS